Matematisk analys LMA100 F3.3

Idag: * Max- och minvärden
* Medelvärdessatsen
* Funktionsgrafer
(* l'Hôpitals regel)

<u>Max- och minvärden</u> (4.1)

<u>Def</u> Låt f vara f:n och $c \in D_f$

$f(c)$ <u>globalt</u> max om $f(c) \geq f(x) \ \forall x \in D_f$

$f(c)$ <u>lokalt</u> max om $\exists h > 0 : f(c) \geq f(x)$

$\forall x : |x-c| < h$

Pss för globalt/lokalt min. $f(c) \leq f(x)$

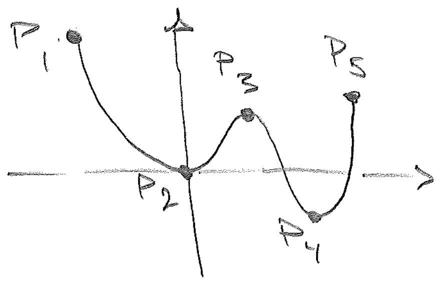
Dessa kallas <u>extrempunkter</u> (c) resp. <u>extremvärden</u> ($f(c)$)

<u>Sats</u>: (Extremvärdessatsen)

Om f kont. på $[a,b]$ antar f ett globalt max och ett globalt min på $[a,b]$

$\exists \ p, q \in [a,b]$ s.a. $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \ \forall x \in [a,b]$

<u>Ex</u>:



Globalt max : P_1
" min : P_4
Lokalt max : P_3
" min : P_2, P_4

Sats (Fermats sats)

Om f har lokalt extremvärde i c och $f'(c)$ existerar (*) så är $f'(c) = 0$

Bevis: Antag c lokalt max (**)

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{\underbrace{h}_{>0}} \overset{(**)}{\leq} 0$$

$$f'(c) \overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{\underbrace{h}_{<0}} \overset{(**)}{\geq} 0$$

$\Rightarrow f'(c) = 0$ Lokalt min pss. $\boxed{}$

Def: En kritisk punkt är $c \in D_f$ s.a
$f'(c) = 0$ eller $\nexists f'(c)$.

kallas ibland singulär pkt.

Fermats sats säger alltså

$c \in D_f$ lokal extrempkt $\Rightarrow$ c kritisk pkt.

Metod för globala extremvärden på $[a, b]$:

i) Kritiska punkter

ii) Ändpunkter

iii) Bestäm globala max/min

Ex $\quad f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$ på $[0,2]$

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}(1+t^2) - \sqrt{t}\cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{1-3t^2}{2\sqrt{t}(1+t^2)^2}$$

i) Kritiska pkt: $\quad x = 0 \quad (\nexists f'(0))$

$x = \stackrel{+}{(-)} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (f'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0)$

ii) Ändpunkter: $\quad x = 0, \; x = 2$

iii) $f(0) = 0 \quad f(2) = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{3^{-1/4}}{1+3^{-1}} = \frac{3^{3/4}}{4} > \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$\Rightarrow$ Globalt max: $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{3^{3/4}}{4}$

Globalt min: $f(0) = 0$

Medelvärdessatsen (4.2)

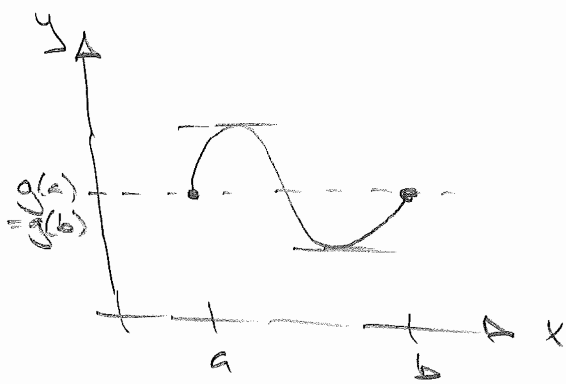
Sats (Teori-PM, Sats 5) [Rolles sats]

Låt g vara fkn s.a.

I) f kont. på $[a,b]$

II) f deriverbar på (a,b)

III) $f(a) = f(b)$



$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$

Bevis: Tre möjliga fall

Fall 1: $g(x) = k$ konst. $\Rightarrow g'(x) = 0 \; \forall x \in (a,b)$

Fall 2: $\exists \, x_0 \in (a,b) : g(x_0) > g(a)$

EVS $\Rightarrow$ g antar max på $[a,b]$

$g(x_0) > g(a) = g(b) \Rightarrow g$ antar max för $\xi \in (a,b)$

$\Rightarrow g(\xi)$ lokalt max $\xRightarrow{\text{Fermat}} g'(\xi) = 0$

Fall 3: $\exists \, x_0 \in (a,b) : g(x_0) < g(a)$

EVS $\Rightarrow$ g antar min på $[a,b]$

$g(x_0) < g(a) = g(b) \Rightarrow g$ antar min för $\xi \in (a,b)$

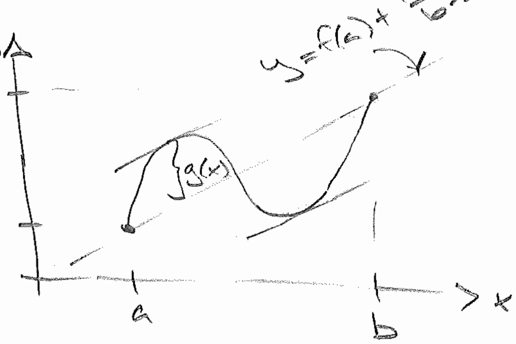
$\Rightarrow g(\xi)$ lokalt min $\xRightarrow{\text{Fermat}} g'(\xi) = 0$ $\blacksquare$

Sats (Teori-PM, Sats 6) [Medelvärdessatsen]

Låt f vara fkn. så.

I) f kont. på $[a,b]$

II) f deriverbar på (a,b)



$\Rightarrow \exists \, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Bevis: Sekantlinjen genom $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad \begin{cases} y(a) = f(a) \\ y(b) = f(b) \end{cases}$$

Låt $g(x) = f(x) - y = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$

Då gäller att:
I) g kont. på $[a,b]$
II) g deriverbar på (a,b)
III) $g(a) = g(b) = 0$

Rolles sats $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$

Vi har $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

så $g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\therefore \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\boxtimes$

Sats (Teori-PM, sats 7)

Om f deriverbar på (a,b) och $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ så är f konstant på (a,b).

Bevis Låt $x_1, x_2 \in (a,b)$ s.a $x_1 < x_2$

f deriverbar på $(a,b) \Rightarrow$ I) f kont. på $[x_1, x_2]$

II) f deriverbar på (x_1, x_2)

MVS $\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$f'(x) = 0 \;\; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$

$\therefore$ f konstant på (a,b) $\boxtimes$

Funktionsgrafer (4.3)

Sats: Låt f vara deriverbar på (a,b)

$f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strängt växande på (a,b)

$f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strängt avtagande på (a,b)

Visas pss som föregående sats mha MVS!

Vi kan även få information om lokala extremvärden för funktionen från dess derivata.

Test med f': Antag f kont. funktion och $c \in D_f$ kritisk punkt.

i) Om $\exists\, a,b \in D_f : c \in (a,b)$ s.a.

$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,c)$ och $f'(x) < 0 \ \forall x \in (c,b)$

har f lokalt max i c.

ii) Om $\exists\, a,b \in D_f : c \in (a,b)$ s.a.

$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,c)$ och $f'(x) > 0 \ \forall x \in (c,b)$

har f lokalt min i c.

Test med f'': Antag f'' kont. nära c.

i) Om $f'(c) = 0$ och $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$ lokalt max

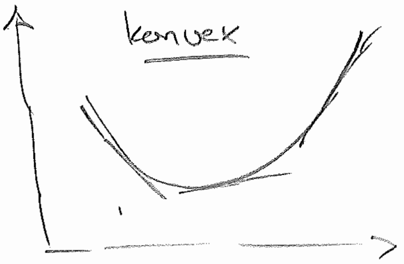
ii) Om $f'(c) = 0$ och $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$ lokalt min

Konvexitet (konkavitet)

Def. Funktion f konvex på $[a,b]$ om tangenten till $y = f(x)$ ligger under $f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Funktion f konkav om $-f$ konvex.

Ex



$f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ konvex på $[a,b]$

$f''(x) < 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ konkav på $[a,b]$

Om $f''(x) < 0$ på ena sidan $x_0 \in D_f$

och $f''(x) > 0$ på andra sidan kalles

x_0 inflektionspunkt.

L'Hôpitals regel (4.4)

Metod för att beräkna (vissa) obestämda gränsvärden av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Sats (l'Hôpitals regel)

Antag f, g deriverbara och $g'(x) \neq 0$ på öppet intervall $I \ni a$ utom möjligtvis i a — kan även vara ∞!

Antag att

i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ eller

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

ii) $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ($L \in \mathbb{R}$ eller $\pm\infty$)

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ex

$$\lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{\ln x}{x^2-1}}_{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Ex

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}_{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

Andra gränsvärden: $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, etc — algebraisk omskrivning

$[1^\infty]$, $[\infty^0]$ etc — logaritmera