Matematisk analys LMA400

<u>Idag</u>: * Kurvritning
* Optimering
* Primitiva funktioner

<u>Kurvritning</u> (4.5)

Saknar en typ av asymptot

<u>Def</u>: Linjen $y = kx + m$ kallas <u>sned asymptot</u> till $f(x)$ om

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (kx+m) \right) = 0$$

För rationella funktioner $\frac{P(x)}{Q(x)}$ bestäms sneda asymptoter genom <u>polynomdivision</u>.

Metod för att skissa grafen till funktion $f(x)$:

A) Bestäm D_f (och V_f)

B) Skärningspunkter ($x=0$, $y=0$)

C) Symmetrier ($f(-x) = \pm f(x)$)

D) Bestäm asymptoter

E) Bestäm $f'(x)$ och kritiska punkter

F) Bestäm $f''(x)$ och pot. inflektionspunkter

G) Tabell över f, f', f''

H) Skissa grafen!

Ex Skissa grafen till $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

Lösn: A) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

B) $y = f(x) = 0 \iff x = 0$

C) $f(-x) \neq \pm f(x)$; inga symmetrier

D) Asymptoter

Horisontella: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} = -\infty$

$\Rightarrow$ Inga horisontella asymptoter.

Vertikala: $\lim\limits_{x \to -1^\pm} \dfrac{x^3}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} = -\infty \Rightarrow x = -1$ vertikal asymptot!

Sneda: $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

$$\begin{array}{l|l} \quad x - 2 & \\ x^3 & x^2+2x+1 \\ -(x^3+2x^2+x) & \\ \quad -2x^2 - x & \\ -(-2x^2-4x-2) & \\ \quad 3x+2 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = x - 2 + \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{(x+1)^2} - (x-2) \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\overset{\to 0}{\frac{3}{x}} + \overset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}}{(1 + \underset{0}{\frac{1}{x}})^2} = 0 \Rightarrow y = x - 2$ sned asymptot då $x \to \pm\infty$!

E) $f'(x) = \ldots = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -3$
$\nexists f'(x) \Rightarrow x = -1$
} Kritiske punkter

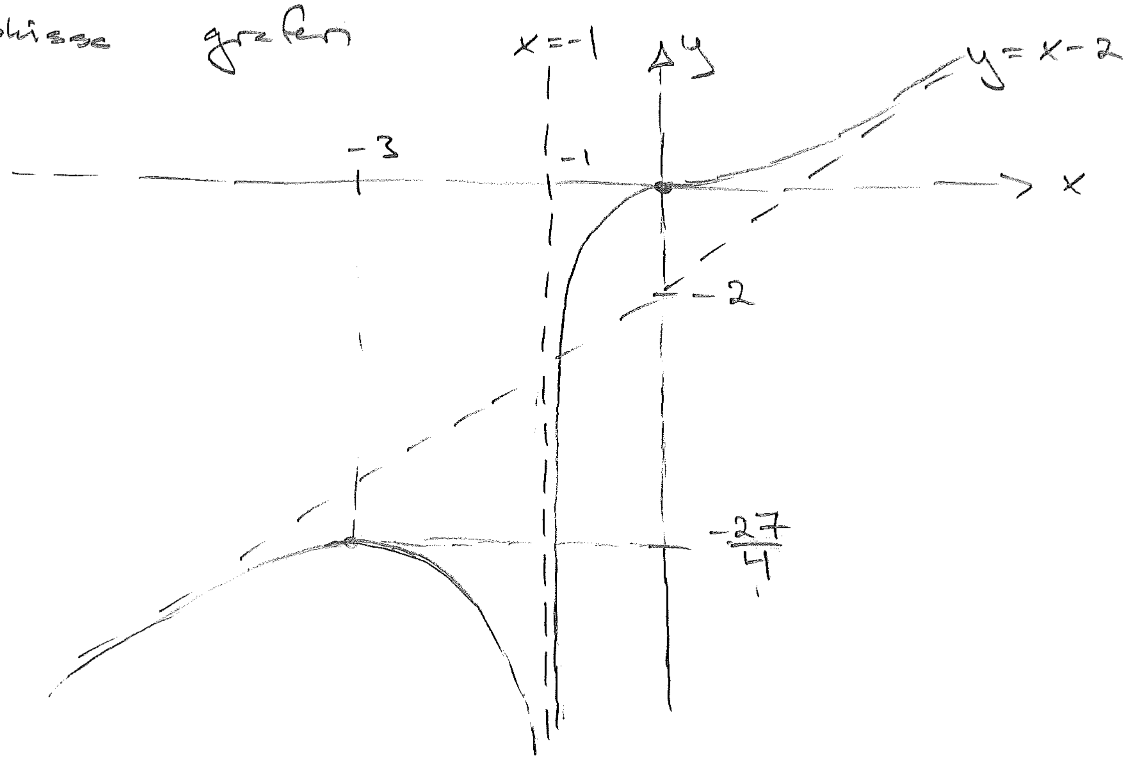
F) $f''(x) = \ldots = \dfrac{6x}{(x+1)^4}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ Pot. infl. pkt.

G) Tabell over f, f', f''

x		-3		-1		0	
$x+3$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$		$+$
f'	$+$	0	$-$	ej def	$+$	0	$+$
f''	$-$		$-$	"	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$-\frac{27}{4}$	$\searrow$	"	$\nearrow$		$\nearrow$
	$\cap$	lokalt max	$\cap$		$\cap$	infl. pkt	$\cup$

H) Skisse grafen



Optimering (4.7)

Tillämpning av teori för extremvärdesproblem

1) Formulera storhet Q, för vilken vi söker extremvärde, som funktion av n variabler.

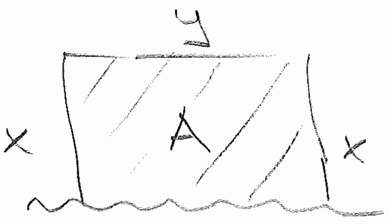
2) Formulera $n-1$ ekvationer (tvång) som relaterar de n variablerna

3) Uttryck Q som funktion av <u>en</u> variabel ← explicit eller implicit!

4) Bestäm extremvärden för Q

<u>Ex</u> Rektangulär inhägnad, längs rak flod, med 1200 m stängsel. Bestäm dimensioner som maximerar arean.

<u>Lösn.</u>



Area: $A = x \cdot y$

Omkrets: $O = 2x + y = 1200\,\text{m}$

$$\Rightarrow \quad y = 1200 - 2x$$

$A > 0!$

$$\Rightarrow \quad A(x) = x(1200-2x) = 1200x - 2x^2 \qquad x \in [0, 600]$$

$$A'(x) = 1200 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 300$$ kritisk punkt

Ändpunkter: $x = 0$, $x = 600$

Alt. 1: $A(0) = A(600) = 0 < A(300) = 1.8 \cdot 10^5 \text{ m}^2$

A kont. på $[0,600]$ $\Rightarrow$ $x = 300$ m globalt max

Alt. 2: $A''(x) = -4 < 0 \quad \forall x \in [0,600]$

$\Rightarrow$ A konkav på $[0,600]$, $x=300$ lokalt max

$\Rightarrow$ $x = 300$ globalt max på $[0,600]$

$\therefore$ Dimensionerna $x = 300$ m $y = 600$ m ger den maximala arean $A = 1{,}8 \cdot 10^5 \text{ m}^2$.

Primitiv funktion (4.9)

Def: Funktion F kallas primitiv funktion (eng. antiderivative) till f på intervall I om

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Ex $f(x) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

$F(x) = x^3$: $F'(x) = 3x^2 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$G(x) = x^3 + 16$: $G'(x) = 3x^2 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ Primitiv funktion inte entydigt bestämd av funktionen $f(x)$!

Sats: Om F primitiv funktion till f på intervall I ges allmänna primitiva funktionen till f på I av

$$F(x) + C$$

där $C \in \mathbb{R}$ godtycklig konstant.

Ex Bestäm primitiv funktion $G(v)$ till $g(v) = 2\cos v - \frac{3}{\sqrt{1-v^2}}$ på $I = [-1, 1]$ s.a. $G(0) = 0$

Lösn: Allmän primitiv funktion

$$G(v) = 2\sin(v) + 3\arccos(v) + C$$

$$G(0) = 2 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0} + 3\underbrace{\arccos(0)}_{\frac{\pi}{2}} + C = 0$$

$$\Rightarrow C = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow G(v) = 2\sin(v) + 3\arccos(v) - \frac{3\pi}{2}$$