Matematisk analys LMA400

Idag: * Summor och areor

* Definita (bestämda) integraler

Summor och areor (5.1)

Summor:

Def. Om $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \le n$ och f funktion skriver vi summan

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \ldots + f(n)$$

Egenskaper:
$$\sum_{i=m}^{n} c f(i) = c \sum_{i=m}^{n} f(i)$$

$$\sum_{i=m}^{n} (f(i) + g(i)) = \sum_{i=m}^{n} f(i) + \sum_{i=m}^{n} g(i)$$

$$\sum_{i=m}^{m+n} f(i) = \sum_{j=0}^{n} f(j+m)$$

Några användbara summor:

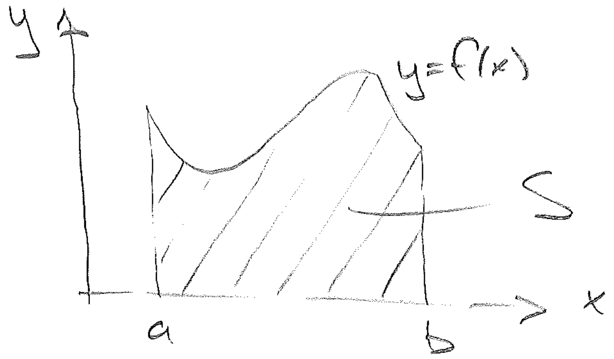
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = x^0 + x^1 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Areaberäkning:

Givet funktion $f(x)$ vill vi bestämma arean under grafen till f mellan $x=a$ och $x=b$



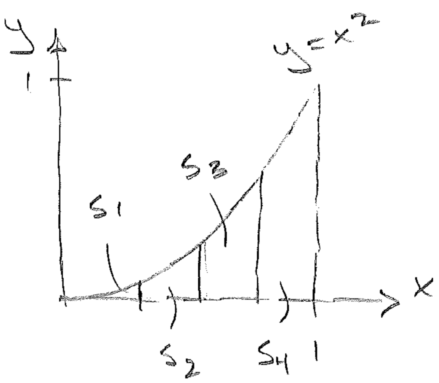
Vi söker arean $A(S)$!

Givet "snäll" funktion $f(x)$ def på $[a,b]$ beräknar vi arean genom att dela upp $[a,b]$ i n delintervall med längd $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

och approximera med rektanglar.

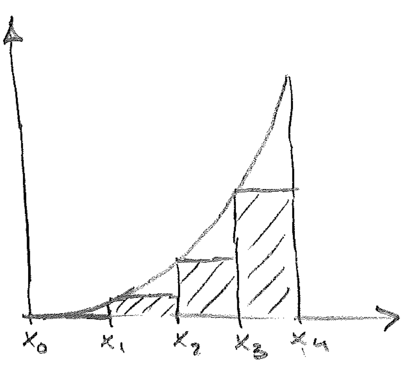
Betrakta $f(x) = x^2$ på $[a,b] = [0,1]$

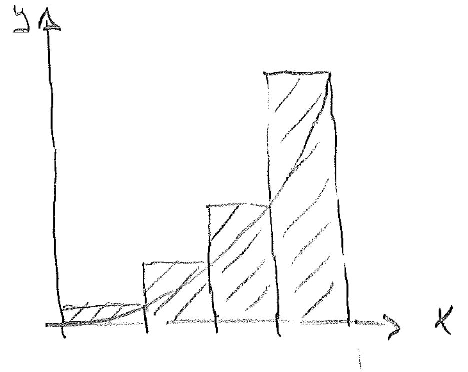


Dela in i n intervall med $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$x_i = a + i\frac{b}{n} = \frac{i}{n}$$

Approximera med rektangel med höjd som ges av vänster resp. höger ändpunkt:





$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \qquad\qquad R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

För $n=4$ har vi då

$$L_4 = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \ldots + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 \simeq 0{,}22$$

$$R_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{4}\cdot 1^2 \simeq 0{,}47$$

När $n \to \infty$ bör L_n, R_n ge sökt area $A(S)$

$$L_n \leq A(S) \leq R_n$$ ty $f(x)$ (strängt) växande.

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+O(\frac{1}{n})}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Arean $A(S) = \lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} R_n = \dfrac{1}{3}$

Def: Arean A av området under grafen till kont. funktion $f(x)$ ges av

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$$

där $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ godtycklig samplingspunkt.

Definit integral (5.2)

Def: Låt f vara funktion def. på $[a,b]$.

Dela upp $[a,b]$ i subintervall med $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

och ändpunkter $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$; och

låt $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ vara godtyckliga.

Den <u>definita</u> <u>(bestämda)</u> <u>integralen</u> av <u>f</u> <u>från</u> <u>a</u> <u>till</u> <u>b</u> ges då av

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$$

om gränsvärdet existerar och är oberoende av valet av x_i^*.

Då kallas f <u>integrerbar</u> på $[a,b]$

$f(x)$ <u>integrand</u> ; a, b integrationsgränser

Summan $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$ kallas <u>Riemannsumma</u>

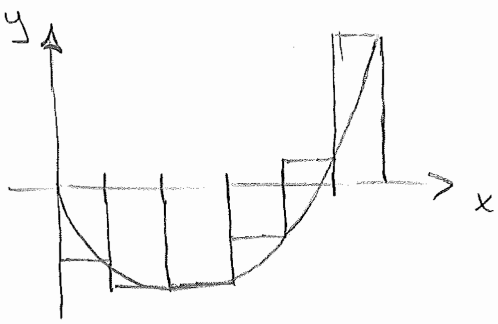
Sats: Om f kont. på $[a,b]$ eller har ändligt många "hopp"-disk. är f integrerbar på $[a,b]$.

Ex a) Beräkna Riemannsumman för $f(x) = x^3 - 6x$ med $x_i^* = x_i$, $[a,b] = [0,3]$, $n = 6$

b) Beräkna integralen $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$

Lösn. a) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$ $x_i^* = x_i = a + i\Delta x = \frac{i}{2}$

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x = \left(f(\tfrac{1}{2}) + \ldots + f(3)\right)\cdot \frac{1}{2} \approx -3{,}9375$$



R_6 inte area, ty $f(x) \not> 0$!

b) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$, $x_i^* = x_i = a + i\Delta x = \frac{3i}{n}$

$$\int_a^b (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

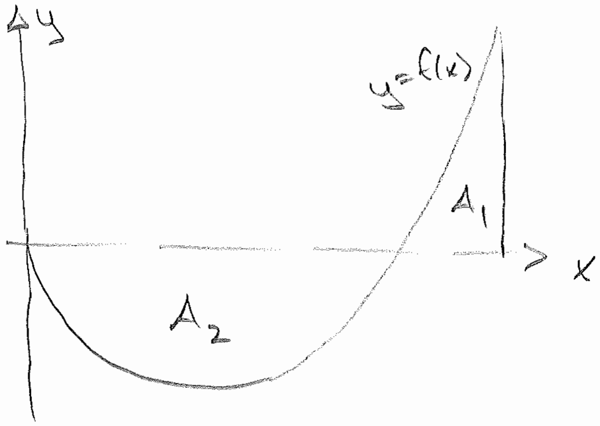
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{54}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6,75$$



Integralen ger area med tecken

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

Sats: Låt f, g vara kont. funktioner

i) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

ii) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

iii) $\int_a^b dx = (b-a)$

iv) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

v) $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ $c \in \mathbb{R}$ konst.

iv) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

Bevis: Följer från egenskaper för summor och gränsvärden!

Sats: Låt f, g kont. på $[a,b]$ med $a \le b$

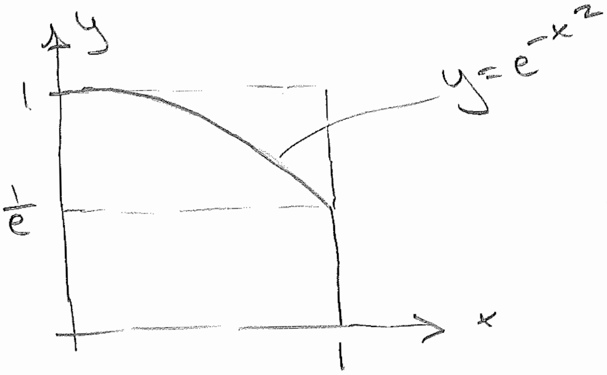
i) $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

ii) $f(x) \ge g(x) \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

iii) $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b] \implies m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

Ex Uppskatta integralen $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

Lösn:



Låt $m = \frac{1}{e}$, $M = 1$

$\implies m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [0,1]$

$$\implies \frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1$$

$$\implies 0{,}367 \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1$$