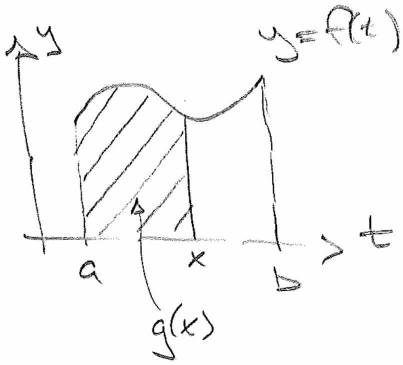
Idag: * Analysens huvudsats
* Indefinit integral

Analysens huvudsats (5.3)

Koppling mellan derivata och integraler. Låter oss utvärdera integraler utan att beräkna gränsvärden.

Låt $f(x)$ kont. på $[a,b]$

och betrakta $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$



Sats (Teori-PM, Sats 8a) [Analysens huvudsats]

Om f kont. på $[a,b]$ är

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

kont. på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b) med $g'(x)=f(x)$

Bevis: Låt $x,\ x+h \in (a,b)$

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

För $h \neq 0$ har vi då $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ (*)

Antag först $h > 0$; f kont. på $[x, x+h]$

EVS $\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in [x, x+h]$: $f(p) \leq f(c) \leq f(q)$ $\forall c \in [x, x+h]$

$$\Rightarrow \quad h f(p) \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq h f(q)$$

$$f(p) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(q)$$

Antag sedan $h < 0$; f kont på $[x+h, x]$

EVS $\Rightarrow$ $\exists\, p, q \in [x+h, x]$: $f(p) \leq f(c) \leq f(q)$ $\forall c \in [x+h, x]$

$$\Rightarrow \quad -h f(p) \leq \int_{x+h}^{x} f(t)\,dt \leq -h f(q)$$

$$f(p) \leq -\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt \leq f(q)$$

$$\Rightarrow \quad f(p) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(q) \quad h \neq 0$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad f(p) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(q) \quad h \neq 0 \quad (**)$$

Låt $h \to 0$. Då gäller $p \to x$, $q \to x$

Eftersom f kont. i x gäller också

$$\lim_{h \to 0} f(p) = \lim_{p \to x} f(p) = f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} f(q) = \lim_{q \to x} f(q) = f(x)$$

$\{(**), \text{Instängningsregeln}\} \Rightarrow g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$ (***)

g deriverbar $\forall x \in (a,b)$ och höger- resp. vänsterderiverbar i ändpunkter $\Rightarrow$ g kont. $\forall x \in [a,b]$ ☒

Första delen kan vi nu använda för att härleda resultatet som är ytterst användbart för att beräkna integraler i praktiken:

<u>Sats</u>: (Teori-PH, Sats 8b) [Analysens huvudsats]

Om f kont. på $[a,b]$ är

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

där $F(x)$ är godtycklig primitiv funk till f, dvs $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

<u>Bevis</u>: Låt $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

(***) $\Rightarrow$ $g'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$

Allmän form för primitiv

$$F(x) = g(x) + C \quad \forall x \in (a,b)$$

g kont på $[a,b]$ $\Rightarrow$ F kont på $[a,b]$

$\Rightarrow$ $F(x) = g(x) + C$ $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \quad F(b)-F(a) = (g(b)+c)-(g(a)+c)$$

$$= g(b)-g(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0}$$

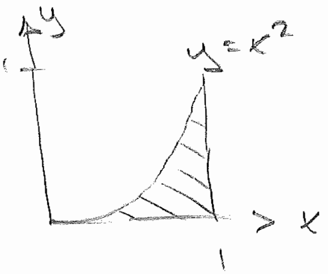
$$= \int_a^b f(t)\,dt. \qquad \blacksquare$$

Vi kan alltså beräkna integral genom att hitta primitiv och utvärdera i ändpunkter:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

Ex Beräkna arean under kurvan $y=x^2$ mellan $x=0$, $x=1$

Lösn:



$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \left\{\begin{array}{l} F(x)=\frac{1}{3}x^3 \\ F'(x)=x^2 \end{array}\right\}$$

$$= \left[F(x)\right]_0^1 = F(1)-F(0)$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^2 = \frac{1}{3}$$

Ex
$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \left\{\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}\right\}$$

$$= \left[\ln|x|\right]_3^6 = \ln 6 - \ln 3 = \ln\frac{6}{3} = \ln 2.$$

Vi kan också formulera analysens huvudsats

a) $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

b) $$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

=> Derivering och integrering är inversa operationer!

<u>Indefinit integral</u> (5.4)

Vi inför notation för primitiva funktioner

<u>Def</u> Låt F vara primitiv till f dvs $F'(x) = f(x)$. Då definierar vi den <u>indefinita (obestämda) integralen</u>

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

<u>Ex</u> $$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Ex För $f(x) = \frac{1}{x}$ har vi $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Allmän primitiv på resp. intervall

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_1 & x > 0 \\ \ln|x| + C_2 & x < 0 \end{cases}$$

Notationen $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ gäller

därför endast på intervall.

Ex Beräkna $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$

Lösn:

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\arctan(x)\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\arctan(x)\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2^4 - 3\cdot 2^2 + 3\arctan(2) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2 + \underbrace{3\arctan(0)}_{=0}\right)$$

$$= -4 + \arctan(2).$$

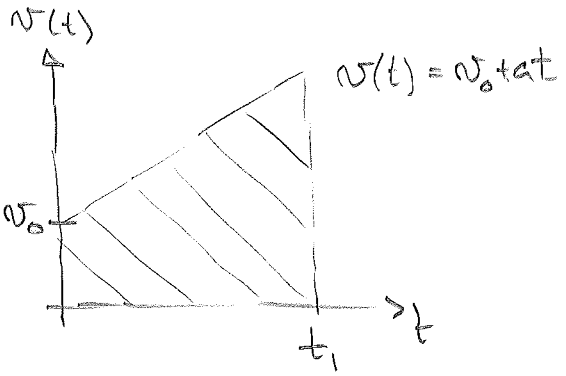
Vi har sett att analysens huvudsats ger

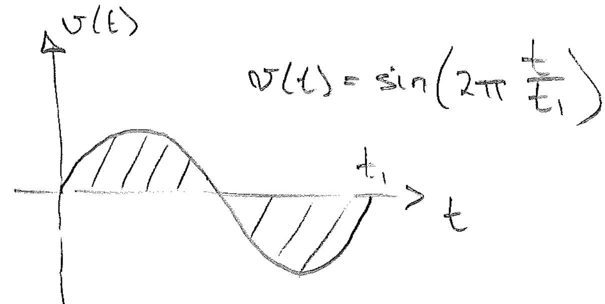
$$\int_a^b \underbrace{F'(x)}_{\text{förändrings-hastighet}}\,dx = \underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{nettoförändring}}$$

<u>Ex</u> Låt $v(t)$ vara <u>hastighet</u> hos objekt (rymdraket) och $x(t)$ dess <u>position</u>. Det gäller att

$v(t) = x'(t)$ dvs $x(t)$ primitiv till $v(t)$.

$$\int_0^{t_1} v(t)\,dt = x(t_1) - x(0) = \Delta x$$





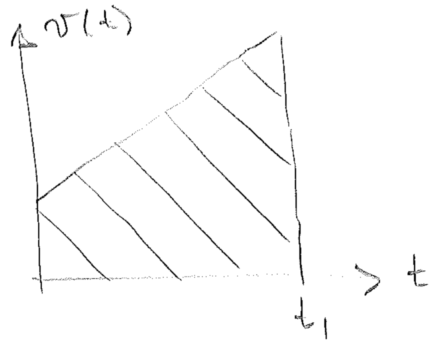
$$\Delta x = v_0 t_1 + \frac{a t_1 \cdot t_1}{2}$$
$$= v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}$$

$$\Delta x = 0$$

Om vi istället söker bruttoförändringen

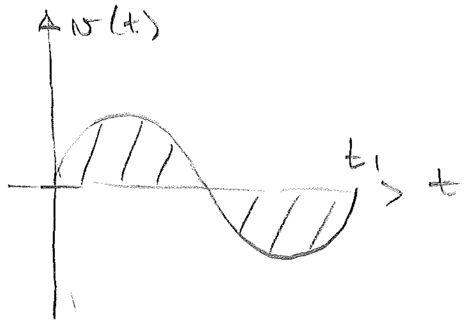
$$\int_a^b |F'(x)|\,dx$$

Ex Rymdraketen igen $s' = \int_0^{t_1} |v(t)|\,dt$



$s' = \Delta x$ ty

$v(t) > 0 \quad \forall t \in [0, t_1]$



$$s' = \int_0^{t_1} \left| \sin\left(2\pi \frac{t}{t_1}\right) \right| dt$$

$$= \int_0^{t_1/2} \sin\left(2\pi \frac{t}{t_1}\right) dt - \int_{t_1/2}^{t_1} \sin\left(2\pi \frac{t}{t_1}\right) dt$$

$$= \left[-\frac{t_1}{2\pi} \cos\left(2\pi \frac{t}{t_1}\right) \right]_0^{t_1/2} - \left[-\frac{t_1}{2\pi} \cos\left(2\pi \frac{t}{t_1}\right) \right]_{t_1/2}^{t_1}$$

$$= \frac{t_1}{2\pi} \left(-(-1) + 1 - (-1 + (-1)) \right)$$

$$= \frac{2t_1}{\pi}$$