Matematisk analys LMA400

Idag: * Substitution

Substitution (5.5)

Vi har sett att vi kan utvärdera integraler genom att bestämma primitiv funktion $F(x)$ till integranden $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

I praktiken behöver vi ofta olika metoder för att hitta primitiv:

Ex Bestäm $\int \frac{x}{\underbrace{\sqrt{1-4x^2}}_{\text{saknas i tabell!}}}\,dx$ ← inte lätt från kända primitiva!

⇒ Använd kedjeregeln för omskrivning i termer av funktion med känd primitiv!

Sats: (Teori-PM, Sats 9a)

Låt $u = g(x)$ deriverbar med $V_g = I$ intervall och f kont. på I. Då gäller

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Bevis: Låt $F'(x) = f(x)$ på I

$$\Rightarrow \int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int F'(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$= \{\text{Kedjeregeln}\} = \int \frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right) d = F(g(x)) + C$$

$$= \{\text{Variabelsub. } u = g(x)\} = F(u) + C =$$

$$= \int F'(u)\,du = \int f(u)\,du$$

$\boxtimes$

$\Rightarrow$ Betyder att vi kan behandla dx, du som differentialer i integraler:

$$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$$

Ex Bestäm $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

Lösn: $$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1-4x^2 \\ du = \frac{du}{dx}dx = -8x\,dx \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

Ex Bestäm $\displaystyle\int x^3 \cos(x^4+1)\,dx$

Lösn: $$\int x^3 \cos(x^4+1)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^4+1 \\ du = 4x^3\,dx \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin(x^4+1) + C$$

Substitution: ersätt besvärlig integral med enklare genom variabelbyte. Konst att hitta rätt substitution:

1) Välj $u = g(x)$ som funktion i integranden s.a. $du = g'(x)\,dx$ förekommer.

2) Välj $u = g(x)$ som inre funktion i sammansatt funktion i integranden

3) Välj $u = g(x)$ som komplicerad funktion i integranden.

4) Ge inte upp!

Ex
$$\int \sin^2\theta \underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{du} = \begin{bmatrix} u = \sin\theta \\ du = \cos\theta\, d\theta \end{bmatrix}$$
$$= \int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$$

Ex
$$\int \frac{2^t}{2^t+3}\, dt = \begin{bmatrix} u = 2^t + 3 \\ du = \ln 2 \cdot 2^t \cdot dt \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{\ln 2}\ln|x| + C$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\ln|2^t + 3| + C$$

Ex $$\int \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \frac{\pi}{x} \\ du = -\frac{\pi}{x^2}\,dx \end{matrix}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int \cos u \, du = -\frac{1}{\pi}\sin u + C = -\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + C$$

Ex $$\int \sqrt{1+x^2}\, \underbrace{x^5}_{=x^4\cdot x}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = 1+x^2 \Rightarrow x^2 = u-1 \\ du = 2x\,dx \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\cdot(u-1)^2\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{4}{5}u^{5} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

För definita (bestämda) integraler måste vi också hålla reda på integrationsgränser vid substitution.

Sats (Teori-PH, Sats 9b)

Låt $u = g(x)$ fkn s.a. $g'(x)$ kont. på $[a,b]$ och $f(x)$ kont. på V_g. Då gäller

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Bevis: Låt $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right) = \{\text{Kedjeregeln}\} = F'(g(x))\,g'(x)$$

$$= f(g(x))\,g'(x)$$

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \{\text{AHb}\} = \left[F(g(x))\right]_a^b$$

$$= \{\text{Variabelsub. } u = g(x)\} = \left[F(u)\right]_{g(a)}^{g(b)}$$

$$= \{\text{AHb}\} = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u)\,du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

$\blacksquare$

Ex Beräkna $\int_0^{\pi/2} \cos x \,\sin(\sin x)\,dx$

Lösn:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(\sin x)\underbrace{\cos x\,dx}_{du} = \left\{\begin{matrix} u = \sin x & x=0 \Rightarrow u=0 \\ du = \cos x\,dx, & x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1 \end{matrix}\right\}$$

$$= \int_0^1 \sin u\,du = \left[-\cos u\right]_0^1 = \cos 0 - \cos 1$$

$$= 1 - \cos 1$$

Symmetriegenskaper:

Med substitution kan vi härleda resultat för jämna och udda funktioner.

Sats: Låt f kont på $[-a, a]$

i) f jämn $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

ii) f udda $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Bevis: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$= -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = -x & x=0 \Rightarrow u=0 \\ du = -dx \;, & x=-a \Rightarrow u=a \end{array} \right\}$

i första integralen

$= \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

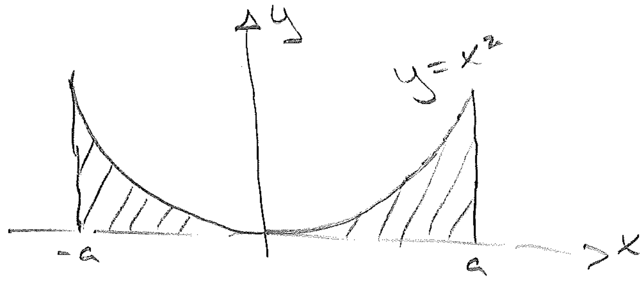
$= \int_{0}^{a} \left(f(-x) + f(x)\right)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \;, & f(-x) = f(x) \\ 0 \;, & f(-x) = -f(x) \end{cases}$

$\blacksquare$

Ex i) $f(x) = x^2$

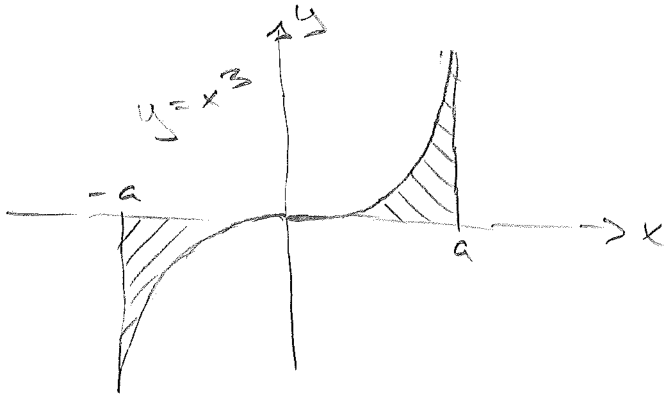
$\int_{-a}^{a} x^2\,dx = 2\int_{0}^{a} x^2\,dx$

$= \frac{2}{3}a^3$



ii) $f(x) = x^3$

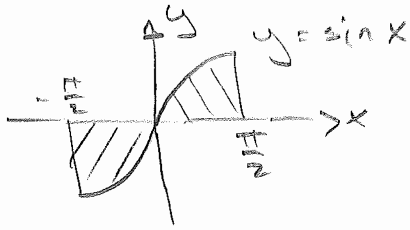
$\int_{-a}^{a} x^3\,dx = 0$



Ex Bestäm $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \, dx$ och $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$

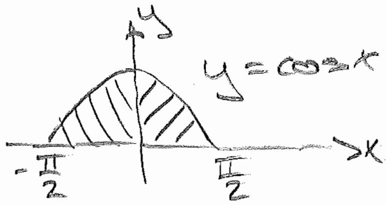
Lösn: $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \, dx = 0$$



$\cos(-x) = \cos(x)$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = 2\left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = 2$$



Ex Bestäm $\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1+x^2+x^4} dx$

Lösn: $f(x) = \frac{\tan x}{1+x^2+x^4}$

$$f(-x) = \frac{\tan(-x)}{1+x^2+x^4} = -\frac{\tan(x)}{1+x^2+x^4}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{\tan(x)}{1+x^2+x^4} dx = 0$$

$\rightarrow$ Mycket användbart att utnyttja symmetri hos integranden!

NB: Varje funktion har unik uppdelning som summan av jämn och udda funktion:

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x)$$

$$= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Ex

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = g(x) = 1-4x^2, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ du = g'(x)\,dx = -8x\,dx \end{array} \right\}$$

$$= \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}}_{f(g(x))} \left(-\frac{1}{8}\right) \underbrace{(-8x)}_{g'(x)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{8} \int f(g(x))\,g'(x)\,dx = -\frac{1}{8} \int f(u)\,du$$

$$= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\,dx$$