Matematisk analys LMA400

Idag: * Partiell integration
* Trigonometriska integraler

Partiell integration (7.1)

Partiell integration (eng. integration by parts) använder produktregeln för att bestämma primitiv fkn.

Sats (Teori-PM, Sats 10)

Om f, g deriverbara gäller

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Bevis:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = \{\text{Produktregeln}\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

Stewart använder även notation: $u = f(x) \quad v = g(x)$

$$\Rightarrow \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ex $\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g'(x)} \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = x , & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin x , & g(x) = -\cos x \end{array} \right\}$

godtycklig primitiv!

$\overset{\text{PI}}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)} \, dx$

$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x \cos x + \sin x + C$

Ex $\int \ln x \, dx = \int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} \, dx$

$= \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} \, dx$

$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

Ex Bestäm $\int x \tan^2 x \, dx$

Lösn: $\int x \tan^2 x \, dx = \int x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$

$= \int x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int x \frac{1}{\cos^2 x} \, dx - \int x \, dx$

$= x \tan x - \int \underbrace{\tan x}_{\frac{\sin x}{\cos x}} \, dx - \frac{1}{2} x^2 = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right\}$

$= x \tan x - \frac{1}{2} x^2 + \int \frac{1}{u} \, du$

$$= x\tan x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|u| + C$$

$$= x\tan x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\cos x| + C$$

Analysens huvudsats ger motsvarande uttryck för bestämda (definita) integraler

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Ex Beräkna $\int_4^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

Lösn: $\int_4^9 \ln x \; x^{-1/2}\,dx = \left[\ln x \cdot 2x^{1/2}\right]_4^9 - \int_4^9 \frac{1}{x}2x^{1/2}\,dx$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_4^9 - \int_4^9 2x^{-1/2}\,dx = \left[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right]_4^9$$

$$= 2\cdot 3\cdot \ln 9 - 4\cdot 3 - (2\cdot 2\cdot \ln 4 - 4\cdot 2)$$

$$= 12\ln 3 - 8\ln 2 - 4$$

Ex Beräkna $\int_0^1 \arctan x\,dx$

Lösn: $\int_0^1 1\cdot \arctan x\,dx$

$$= \left[x\cdot \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{1+x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = 1+x^2 \\ du = 2x\,dx\end{matrix}\right\}$$

$$= \left[x \arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du$$

$$= \left[x \arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_1^2$$

$$= \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Trigonometriska integraler (7.2)

Vi kan använda trigonometriska identiteter för att integrera (vissa) kombinationer av trigonometriska funktioner mha substitution

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$:

Ex $$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right\}$$

$$= -\int (1-u^2)^2 u^2 \, du = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du$$

$$= -\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Strategi: Skriv udda potens $\sin^{2k+1}x = \sin^{2k}x \cdot \sin x$

använd trig.ettan och substituera $u = \cos x$

Motsvarande för $\cos^{2k+1}x$.

För jämna potenser kan formeln för dubbla vinkeln användas.

Ex $\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx$

$= \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x\, dx \end{array} \right\}$

$= \int (1-u^2)\, du = u - \frac{1}{3}u^3 + C$

$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

$\int \tan^m x \sec^n x\, dx$: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

Motsvarande strategi genom att utnyttja

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ samt $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

och $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$.

Ex $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx =$

$= \int \tan^6 x (1+\tan^2 x)\sec^2 x\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \tan x \\ du = \sec^2 x\, dx \end{array} \right\}$

$= \int u^6 (1+u^2)\, du = \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9 + C$

$$= \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{9}\tan^9 x + C$$

I allmänhet behöver vi kombinera olika integrationstekniker och trigonometriska identiteter

Ex Bestäm $\int \sin 4x \cos 5x \, dx$

Lösn: $\int \sin 4x \cos 5x \, dx$

$$= \{ \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B \}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sin(4x+5x) + \sin(4x-5x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sin 9x - \sin x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{18}\cos 9x + \frac{1}{2}\cos x + C$$