Matematisk analys LMA400

Idag: * Strategier för integration

* Oegentliga integraler

Strategier för integration (7.5)

Strategi för att bestämma $\int f(x)\,dx$ givet standardintegraler (Stewart s. 503)

1) Förenkla integranden

2) Uppenbara substitutioner

$u = g(x)$ s.a. $du = g'(x)\,dx$

förekommer i $\int f(x)\,dx$

3) Klassificera $f(x)$

a) Trigonometrisk => Trig. subst. tex $u = \sin x$ + trig. identitet

b) Rationell => Partialbråk

c) $x^n f(x)$ => Partialint.

d) Rötter => Invers trig. subst. tex $x = a\sin\theta$ + trig. identitet

4) Försök igen!

Kombinera följande tekniker

a) Substitution

b) Partialint.

c) Algebraisk manipulation

d) Partialbråk

<u>Ex</u> Finns inte entydigt sätt att integrera given funktion

i) $\int x \ln x^2 \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int 1 \cdot \ln u \, du$

$\overset{PI}{=} \frac{1}{2} u \ln u - \frac{1}{2} \int u \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{2} u \ln u - \frac{1}{2} u + C$

$= \frac{1}{2} x^2 \ln x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C = x^2 \ln|x| - \frac{1}{2} x^2 + C$

ii) $\int x \ln x^2 \, dx = \int 2x \ln|x| \, dx$

$\overset{PI}{=} x^2 \ln|x| - \int x^2 \frac{1}{x} \, dx = x^2 \ln|x| - \int x \, dx$

$= x^2 \ln|x| - \frac{1}{2} x^2 + C$

iii) $\int x \ln x^2 = \int 2x \ln|x|\,dx$

$$\overset{PI}{=} 2x\,(x\ln|x| - x) - \int 2\,(x\ln|x| - x)\,dx$$

$$= 2x^2 \ln|x| - 2x^2 - \int 2x \ln|x|\,dx + x^2$$

$$\Rightarrow 2\int 2x \ln|x|\,dx = 2x^2\ln|x| - x^2$$

$$\Rightarrow \int 2x \ln|x|\,dx = x^2\ln|x| - \frac{1}{2}x^2$$

<u>Oegentliga integraler</u> (7.8)

Hittills har vi studerat $\int_a^b f(x)\,dx$ där $a, b \in \mathbb{R}$ och f kont. på $[a,b]$.

<u>Def</u>: i) Om $\exists \int_a^t f(x)\,dx \;\; \forall t \geq a$ $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$

ii) Om $\exists \int_t^b f(x)\,dx \;\; \forall t \leq b$ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$

Om $\lim_{t\to\pm\infty}$ existerar kallas $\int_a^\infty$ resp $\int_{-\infty}^b$

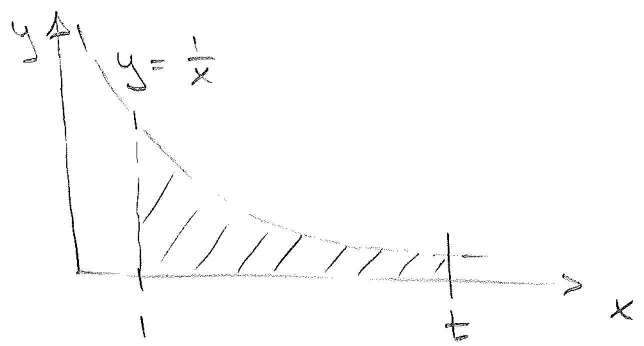
<u>konvergent</u>, annars <u>divergent</u>.

iii) Om $\int_a^\infty f(x)\,dx$ <u>och</u> $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ konvergerar

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Ex Beräkna $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

Lösn:



$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\ln x\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty \quad \text{dvs } \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ \underline{divergent}}.$$

Ex För vilka $p \neq 1$ konvergerar $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$?

Lösn: $$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx = \{p \neq 0\}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1}\right)$$

$\Rightarrow$ konvergent om $1-p<0 \Rightarrow p>1$

divergent om $1-p>0 \Rightarrow p<1$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p>1 \\ \infty & p \leq 1 \end{cases}$$

<u>Def</u>: i) Om f kont. på $[a,b)$ och disk. i b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

ii) Om f kont. på $(a,b]$ och disk. i a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

Om $\lim_{t\to b^-}$ resp. $\lim_{t\to a^+}$ existerar kallas

$\int_a^b f(x)\,dx$ <u>konvergent</u>, annars <u>divergent</u>

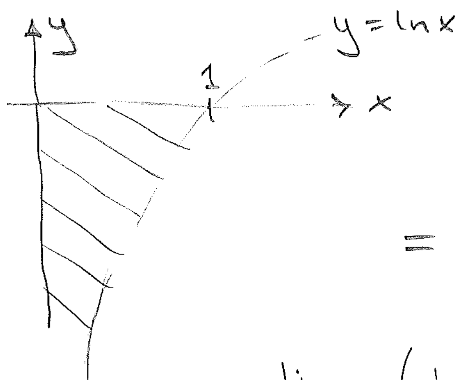
iii) Om f disk. i c, $a<c<b$, och

$\int_a^c f(x)\,dx$ och $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergerar

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

<u>Ex</u> Beräkna $\int_0^1 \ln x \; dx$

<u>Lösn</u>:



$$\int_0^1 \ln x \; dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x \, dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \Big[x \ln x - x \Big]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \Big(1 \underbrace{\ln 1}_{=0} - 1 - t \ln t + \underbrace{t}_{\to 0} \Big)$$

$$= -1 + \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \{\text{l'Hôpital}\} = -1 + \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}$$

$$= -1 - \lim_{t \to 0^+} t = -1$$

Ex Beräkna $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$

Lösn: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow$ f inte kont. på $[0,3]$

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t \to 1^-} \Big[\ln|x-1|\Big]_0^t = \lim_{t \to 1^-} \ln|t-1| = -\infty$$

$\Rightarrow$ $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$ divergent.

Sats: Antag f, g kont. och $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \geq a$

i) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent

ii) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent

Motsvarande resultat gäller andra oegentliga integraler.

$\underline{\text{Ex}}$ Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$ om den konvergerar

$\underline{\text{Lösn}}$: $\displaystyle\int_0^t \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^t \arctan x \,\frac{(-2x)}{(1+x^2)^2}\,dx$

$$\overset{PI}{=} -\frac{1}{2}\left[\arctan x \cdot \frac{1}{(1+x^2)}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\,\frac{\arctan t \;(\to \frac{\pi}{2})}{1+t^2}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = \tan\theta \\ dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\arctan t} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2\cos^2\theta}\,d\theta = \left\{ 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\arctan t} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\arctan t} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\arctan t} = \frac{1}{4}\arctan t + \frac{1}{8}\sin(2\arctan t)$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\underbrace{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = \frac{\pi}{8}$$