Matematisk analys LMA400

Idag: * Differentialekvationer
* Lutningsfält och Eulers metod
* Separabla diff. ekv.

Differentialekvationer (9.1)

Differentialekvation (DE) ger relation mellan obekant funktion $y(x)$ och dess derivator.

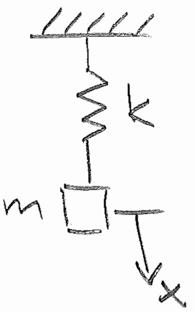
Ordningen av DE ges av högsta förekommande ordnings derivata.

Ex Naturlig tillväxt

$$P'(t) = kP(t)$$ 1:a ordnings DE

$$\Rightarrow P(t) = Ce^{kt}$$

Ex Massa-fjäder-system



$x = 0$ jämvikt $\Rightarrow$ $F = -kx$ fjäderkraft

Newton II: $ma = F$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$ 2:a ordnings DE

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ vinkel-frekvens

Allmän lösning $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

<u>Ex</u> Visa att $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ löser $y' = \frac{1}{2}(y^2-1) \; \forall c \in \mathbb{R}$

<u>Lösn:</u>
$$y' = \frac{ce^t(1-ce^t) + (1+ce^t)ce^t}{(1-ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}$$

$$\frac{1}{2}(y^2-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1+ce^t)^2}{(1-ce^t)^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(1+ce^t)^2-(1-ce^t)^2}{(1-ce^t)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4ce^t}{(1-ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2} \qquad \blacksquare$$

<u>Begynnelsevärdesproblem</u> (BVP) består i att hitta lösning till DE som uppfyller <u>begynnelsevillkor</u> $y(t_0) = y_0$

<u>Ex</u> Lös BVP $y' = \frac{1}{2}(y^2-1)$, $y(0) = 2$

<u>Lösn:</u> $y(t) = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ allmän lösning

$$y(0) = \frac{1+c}{1-c} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1+c = 2(1-c)$$

$$\Rightarrow 3c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{3+e^t}{3-e^t}$$ löser BVP.

Lutningsfält och Eulers metod (9.2)

I allmänhet kan vi inte lösa DE analytiskt.

För DE på formen $y' = F(x,y)$

kan vi approximera lösningen

Lutningsfält:

Funktionen $F(x,y)$ ger lutningen y'

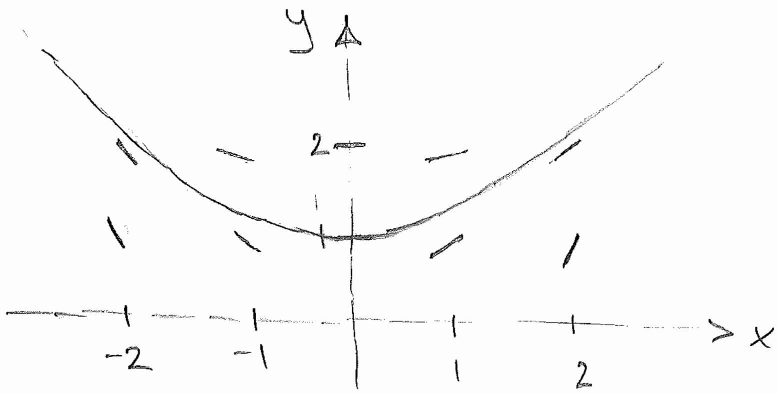
hos lösningen y i plt (x,y)

=> Skissa lösningen utan explicit uttryck.

Ex Skissa lösningen till $y' = \frac{x}{y}$, $y(0) = 1$

Lösn: Bestäm lutning i några plt

$x \backslash y$	1	2
0	0	0
1	1	1/2
2	2	1



Jämför med den exakta lösningen

$$y(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Eulers metod:

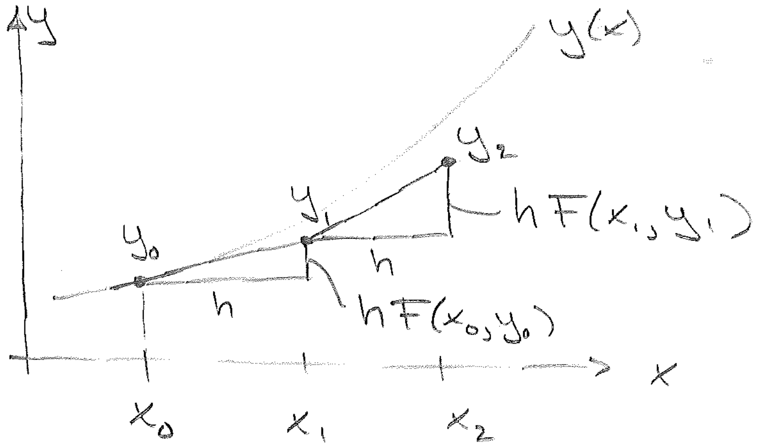
Lösningen till $y' = F(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

approximeras av

$$x_n = x_{n-1} + h$$

steglängd

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$



Ex Approximera lösningen till $y' = \frac{x}{y}$, $y(0) = 1$ med steglängd $h = \frac{1}{2}$

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 1 \qquad F(x_0, y_0) = 0$

$x_1 = \frac{1}{2} \qquad y_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1 \qquad F(x_1, y_1) = \frac{1}{2}$

$x_2 = 1 \qquad y_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \qquad F(x_2, y_2) = \frac{4}{5}$

$x_3 = \frac{3}{2} \qquad y_3 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{4} \qquad F(x_3, y_3) = \frac{6}{7}$

$\vdots$

Separabla diff.ekv. (9.3)

Separabel DE kan skrivas på formen

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) = \frac{g(x)}{h(y)} \quad , \quad h(y) \neq 0$$

Denna klass av ekvationer kan lösas analytiskt genom att separera variabler och integrera:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Ex Lös BVP $y' = \frac{x^2}{y^2}$, $y(0) = 2$

Lösn: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow y^2\,dy = x^2\,dx$

$$\Rightarrow \int y^2\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + C_0$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + C} \qquad C = 3C_0$$

$$y(0) = \sqrt[3]{0^3 + C} = \sqrt[3]{C} = 2 \Rightarrow C = 8$$

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

Ex Bestäm lösningen till $y' = x^2 y$ (*)

Lösn: $\frac{dy}{dx} = x^2 y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = x^2 dx \qquad y \neq 0$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx$

$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + C$

$\Rightarrow |y| = e^{\frac{1}{3}x^3 + C} = e^C e^{x^3/3}$

$\Rightarrow y = \pm e^C e^{x^3/3}$

Notera att $y = 0$ löser (*)

$\Rightarrow y = A e^{x^3/3} \qquad A \in \mathbb{R}$ konst.

Ex Bestäm lösning till $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ (*)

Lösn: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(y^2-1) \Rightarrow \int \frac{2}{y^2-1} dy = \int dx \qquad y \neq \pm 1$

$\frac{2}{y^2-1} = \frac{2}{(y+1)(y-1)} = \{\text{Partialbråk}\} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{(A+B)y + (-A+B)}{(y+1)(y-1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{2}{y^2-1} dy = \int \left(-\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1}\right) dx$

$$= -\ln|y+1| + \ln|y-1| + c_1$$

$$= \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c_1$$

$$\int dx = x + c_2$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + \underbrace{(c_1+c_2)}_{=c_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = \pm e^{x+c_0} = \underbrace{\pm e^{c_0}}_{=c} e^x \qquad c \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad y(1-ce^x) = (1+ce^x)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1+ce^x}{1-ce^x}$$

Dessutom ser vi att $y = \pm 1$ löser $(*)$.

dvs $c = 0$ tillåtet.