Idag: * Populationsmodeller

* Linjära DE av 1:a ordningen

Populationsmodeller (9.4)

Vi har tidigare studerat naturlig tillväxt

$$\frac{dP}{dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{relativ tillväxthastighet}}}{k}P \qquad (*)$$

Separabel DE: $\int \frac{1}{P}\,dP = \int k\,t \Rightarrow \ln|P| = kt + C$

$\Rightarrow \quad P(t) = P_0 e^{kt} \quad , \quad P_0 = P(0)$

Samma DE beskriver mängd olika tillämpningar

- Populationsdynamik
- Radioaktivt sönderfall m.fl.
- Kemiska reaktioner

(*) beskriver population i ideal situation

I situation med begränsade resurser

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) \qquad M = \text{bärförmåga} \qquad (**)$$

"carrying capacity"

$\Rightarrow \quad P < M : \frac{dP}{dt} > 0 \quad , \quad P > M : \frac{dP}{dt} < 0$

Separabel DE $\quad \int \frac{M}{P(M-P)}\, dP = \int k\, dt$

$$\frac{M}{P(M-P)} = \{\text{Partialbråk}\} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P} \right) dP = \int k\, dt$$

$$\Rightarrow \ln|P| - \ln|M-P| = kt + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{M-P}{P}\right| = -kt - C$$

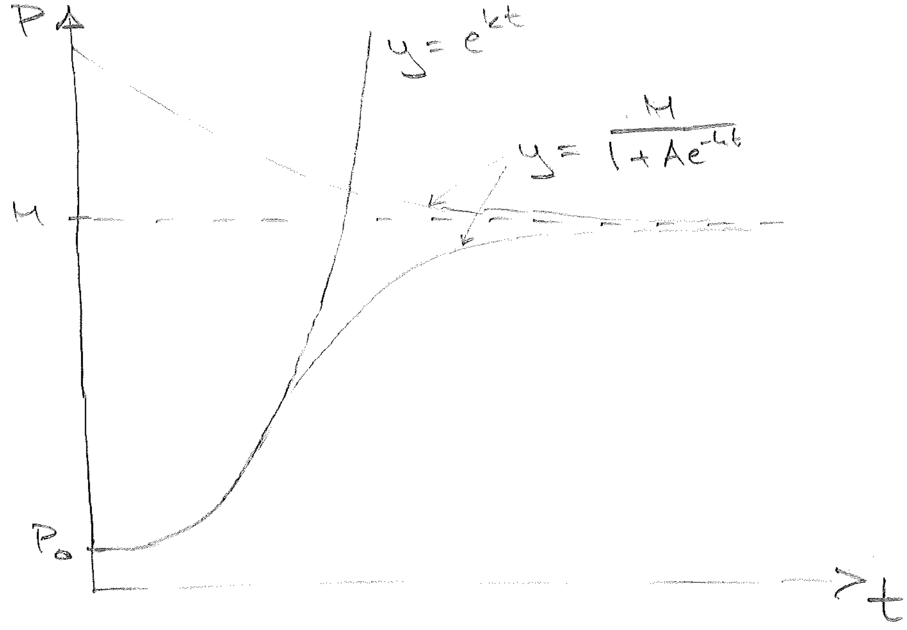
$$\Rightarrow \frac{M-P}{P} = \underbrace{\pm e^{-C}}_{=A} e^{-kt} = A e^{-kt} \qquad A \neq 0$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{M}{1 + A e^{-kt}}$$

$$P(0) = P_0 = \frac{M}{1+A} \Rightarrow A = \frac{M - P_0}{P_0}$$

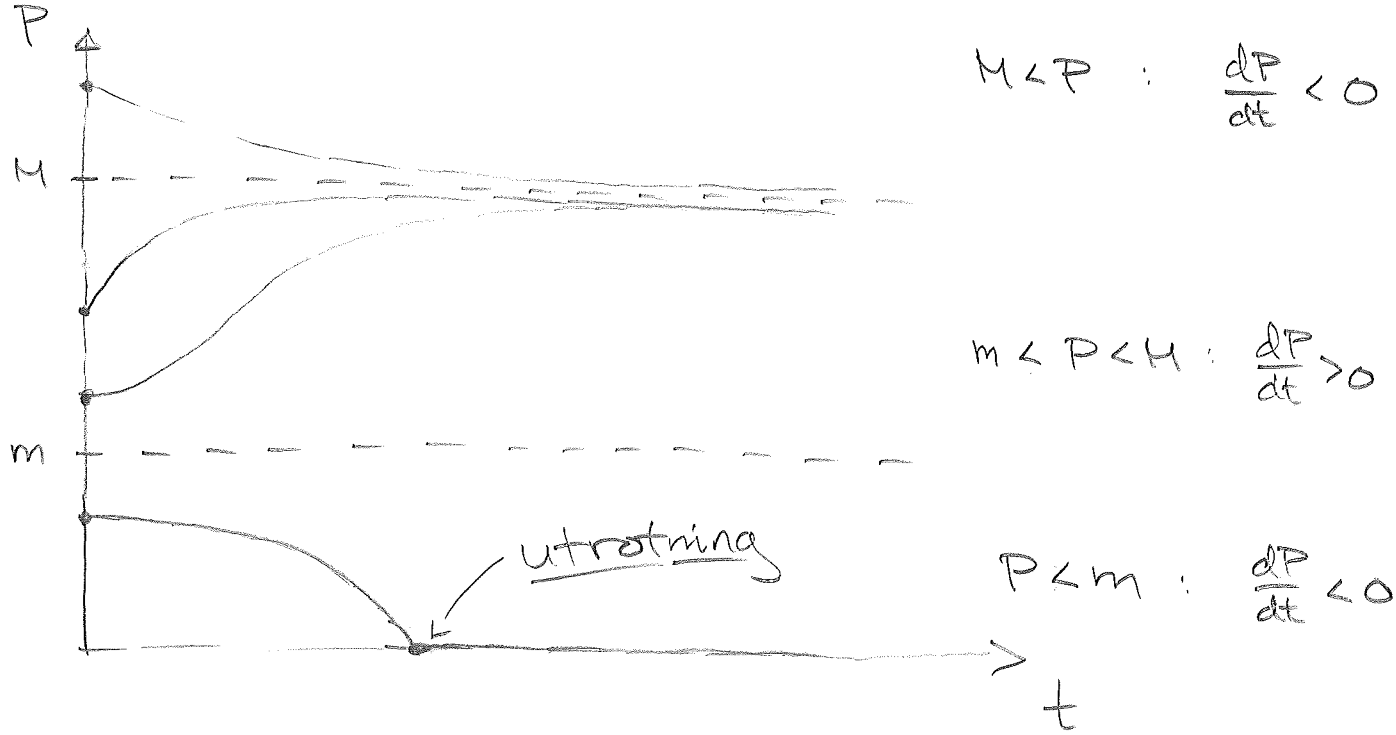
$A = 0 \Rightarrow P = M$ löser också (k*)

$$\Rightarrow P(t) = \frac{M}{1 + A e^{-kt}} \quad , \quad A = \frac{M - P_0}{P_0}$$



Vi kan fortsätta inkludera olika mekanismer som påverkar populationens dynamik:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{M}\right)\underbrace{\left(1-\frac{m}{P}\right)}_{\text{gles population}}$$



Linjära DE av 1:a ordning (9.5)

Vi betraktar nu linjär DE av 1:a ordningen

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{linjär i } y}}{y} = Q(x)$$

där $P(x)$, $Q(x)$ kontinuerliga funktioner.

I allmänhet inte seperabel, behöver annan metod

Ex $\quad y' + \frac{1}{x}y = 2 \qquad x \neq 0$

$$\Rightarrow \quad xy' + y = 2x \Rightarrow (xy)' = 2x$$

$$\Rightarrow \quad xy = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad y = x + \frac{C}{x}$$

Metoden kan generaliseras till alla DE på formen

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

genom multiplikation med integrerande faktor $I(x)$:

$$I(x)\,(y' + P(x)y) = I(x)Q(x) \quad (*)$$

Bestäm $I(x)$ s.a. $I(x)(y' + P(x)) = (I(x)y)'$

$\Rightarrow \quad I(x)P(x) = I'(x) \quad$ separabel

$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{I}\, dI = \int P\, dx \Rightarrow \ln|I| = \int P(x)\, dx$

$\Rightarrow \quad I(x) = A\, e^{\int P(x)\, dx}$

Vi söker bara en primitiv, välj $A = 1$

$\Rightarrow \quad I(x) = e^{\int P(x)\, dx}$

$(*) \Rightarrow \quad (I(x)y)' = I(x)Q(x)$

$\Rightarrow \quad I(x)y = \int I(x)Q(x)$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{I(x)} \int I(x)\,Q(x)\, dx$

Integrerande faktor:

Lösningen till $y' + P(x)y = Q(x)$ ges genom att multiplicera med integrerande faktor $I(x) = e^{\int P(x)\, dx}$ och integrera.

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx$$

Ex Lös BVP $t^3 y' + 3t^2 y = \cos t$

$t > 0, \quad y(\pi) = 1$

Lösn:
$$y' + \frac{3}{t} y = \frac{\cos t}{t^3} \qquad t > 0$$

$$I(t) = e^{\int \frac{3}{t} dt} = e^{3 \ln t} = t^3$$

$$\Rightarrow (t^3 y)' = \cos t$$

$$\Rightarrow t^3 y = \int \cos t \, dt = \sin t + C$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sin t}{t^3} + \frac{C}{t^3}$$

$$y(0) = \underbrace{\frac{\sin \pi}{\pi^3}}_{=0} + \frac{C}{\pi^3} = 1 \Rightarrow C = \pi^3$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\sin t}{t^3} + \frac{\pi^3}{t^3}$$

Ex Lös $x^2y' + xy = 1 \quad x > 0 \quad y(1) = 2$

Lösn: $$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \quad x > 0$$

$$I(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\Rightarrow xy' + y = \frac{1}{x}$$

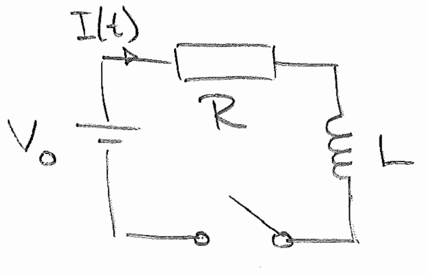
$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}(xy) = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow xy = \ln x + C \Rightarrow y = \frac{\ln x + C}{x}$$

$$y(1) = \frac{\ln 1 + C}{1} = C = 2$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$$

Ex Elektrisk RL krets sluts vid $t = 0$



$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0$$

$$I(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V_0}{L}$$

Integrerande faktor: $e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t}$

$$\Rightarrow \quad I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{U_0}{L}\, dt$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t} \left[\frac{U_0}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C \right] = \frac{U_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_0}{R} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$