Idag: * Linjära DE av 2:a ordningen

Linjära DE av 2:a ordningen

Betraktar nu diff. ekv. på formen

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = G(x)$$

Om $G(x) = 0$ kallas DE för homogen

Sats: Låt y_1, y_2 vara linjärt oberoend lösn. till

$$P(x)y'' + Q(x)\,y' + R(x)y = 0$$

Då ges den allmänna lösningen av

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

där $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ godtyckliga konst.

Vi begränsar oss till fallet P, Q, R konst.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad , \quad a \neq 0 \qquad (*)$$

Ansätt $y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx}, \; y'' = r^2 e^{rx}$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

Kallas den <u>karaktäristiska ekvationen</u> för $(*)$

med lösningar $r_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 2ac}}{2a}$

Tre fall:

I) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \; r_1 \neq r_2 \Rightarrow y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

II) $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

III) $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

$$\left(= A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x}\right)$$

<u>Ex</u> Lös $y'' - 6y' + 13y = 0$

<u>Lösn:</u> Karakt. ekv. : $r^2 - 6r + 13 = 0$

$$\Rightarrow r_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

Begynnelsevärdesproblem (BVP) resp.

randvärdesproblem (RVP) för diff. ekv.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

BVP: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

RVP: $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$

Ex Lös BVP $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Lösn: Karakt. ekv. : $r^2 + r - 6 = 0$

$\Rightarrow (r-2)(r+3) = 0 \Rightarrow r_1 = 2, \; r_2 = -3$

$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$

$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{5} \\ c_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{3}{5} e^{2x} + \frac{2}{5} e^{-3x}$$

Ex Lös RVP $y''+2y'+y=0$ $y(0)=1$, $y(1)=3$

Lösn. Karakt ekv. : $r^2+2r+1=(r+1)^2=0$

$\Rightarrow$ $r_1=r_2=-1$

$\Rightarrow$ $y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

$y(0)=c_1=1$ $\Rightarrow$ $y(x)=e^{-x}+c_2xe^{-x}$

$y(1)=e^{-1}+c_2e^{-1}=3$ $\Rightarrow$ $c_2=3e-1$

$\Rightarrow$ $y(x)=e^{-x}+(3e-1)xe^{-x}$

Inhomogena ekvationer (17.2)

Vi betraktar nu inhomogen DE med konstanta koeff.

$$ay''+by'+cy=G(x) \quad a\neq 0 \qquad (*)$$

Motsvarand homogena ekvation ges av

$$ay''+by'+cy=0 \qquad (**)$$

Sats: Den allmänna lösningen till (*) ges av $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ där y_p är en lösning till (*) och y_h är allmänna lösningen till (**).

y_p = partikulärlösning, y_h = homogenlösning

För att bestämma y_p använder vi ansats med obestämda koefficienter

1) Om $G(x) = e^{kx} P(x)$, $\deg(P) = n$ — P, Q polynom

$\Rightarrow y_p(x) = e^{kx} Q(x)$, $\deg(Q) = n$

2) Om $G(x) = e^{kx} P(x) \begin{Bmatrix} \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix}$, $\deg(P) = n$

$\Rightarrow y_p(x) = e^{kx}\left(Q(x) \sin mx + R(x) \cos mx \right)$,

$\deg(Q) = \deg(R) = n$

3) Om y_p löser (**)

$\Rightarrow y_p \to x\, y_p$

Ex Lös $y'' - 6y' + 5y = \underbrace{5x+4}_{=G(x)}$

Lösn: Karakt. ekv. $r^2 - 6r + 5 = 0$

$$\Rightarrow r_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$$

$$\Rightarrow y_h(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{x}$$

$G(x) = 5x+4 \Rightarrow$ Ansätt $y_p(x) = Ax + B$

$$\Rightarrow y_p'(x) = A, \quad y_p''(x) = 0$$

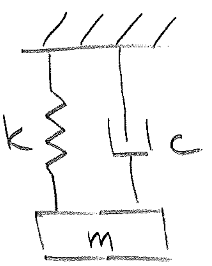
$$\Rightarrow 0 - 6(A) + 5(Ax+B) = 5x+4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5A = 5 \\ -6A + 5B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{x} + x + 2$$

Tillämpningar (17.3)

Betrakta massa-fjäder-system med dämpning



$$\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2}}_{=ma} + \underbrace{c\frac{dx}{dt}}_{=-F_d} + \underbrace{kx}_{=-F_s} = 0$$

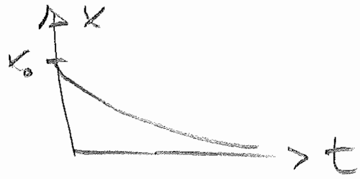
$$m, c, k > 0$$

Karakt. elv. : $mr^2 + cr + k = 0$

$$\Rightarrow \quad r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

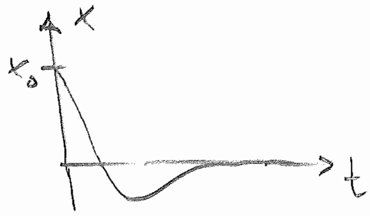
$\underline{c^2 - 4mk > 0}$: Overdempet $r_1, r_2 < 0$

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$



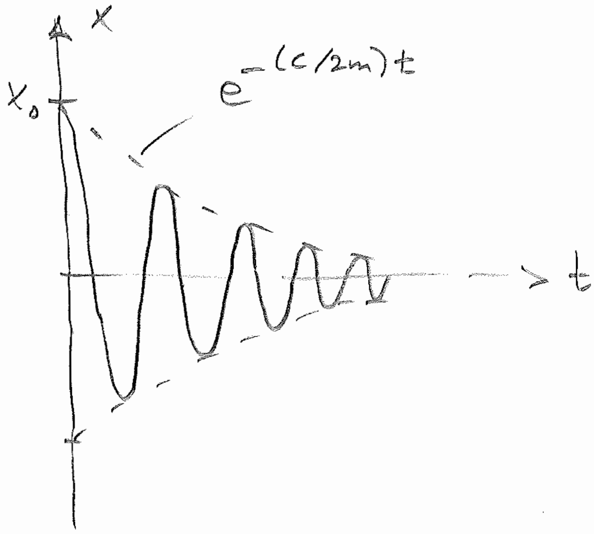
$\underline{c^2 - 4mk = 0}$: Kritiskt dempet $r_1 = r_2 = r < 0$

$$x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$$



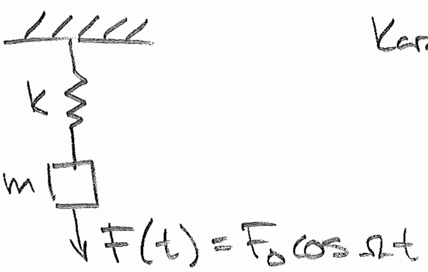
$\underline{c^2 - 4mk < 0}$: Underdempet $r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\omega$

$$x = e^{-(c/2m)t}\left(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t\right)$$



Ex Lös $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$ $\quad \Omega \neq \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Lösn :



Karakt. elv. : $mr^2 + k = 0$

$$\Rightarrow r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

$\Rightarrow \quad x_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$

$F(t) = F_0 \cos \Omega t \quad \Rightarrow \quad$ Ansatz $\quad x_p(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$

$\Rightarrow \quad x_p''(t) = -\Omega^2 (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$

$\Rightarrow \quad (-m\Omega^2 + k)(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) = F_0 \cos \Omega t$

$\Rightarrow \quad A = \dfrac{F_0}{k - m\Omega^2} = \dfrac{F_0}{m(\frac{k}{m} - \Omega^2)} = \dfrac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)}, \quad B = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \dfrac{F_0 \cos \Omega t}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$