

MATEMATIK

Hjälpmedel: Inga

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Tentamen 2017-01-13 kl. 14:00–18:00

Telefonvakt: Torbjörn Lundh telefon.: 031-772 3503

Betygsgränser 3:a 20 poäng, 4:a 30 poäng, 5:a 40 poäng, max: 50 poäng

Matematisk analys — LMA400

OBS: Tänk på att det huvudsakligen är beräkningar och motiveringar som ger poäng!

Teori

1. Bevisa att $f'(x) > 0$ på ett intervall så är $f(x)$ växande där. 5p
2. Bevisa den andra delen av Integralkalkylens huvudsats, dvs att om f är kontinuerlig på $[a, b]$, så gäller att $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, där $F' = f$. 7p

Problem

3. Beräkna följande gränsvärden
 - a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x}{(x^2 - 2)(x^2 + 3)}$ 2p
 - b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{(x - 3)(x + 2)}$ 2p
 - c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ 3p
4. Beräkna följande integraler
 - (a) $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$ 3p
 - (b) $\int_1^2 (x - 2) \ln(x) dx$ 3p
5. Lös differentialekvationerna
 - (a) $y'' - 9y = 0$, där $y(0) = 3$ och $y'(0) = 3$. 2p
 - (b) $y'' - 9y = \cos^2 x$. 3p
 - (c) $y' + \tan(x)y = \tan(x)$, $y(0) = 2$ 4p

Var vänlig vänd!

6. Beräkna volymen man får när man roterar kurvanstycket $f(x) = \ln(x)$, mellan $x = 1$ och $x = e$, runt x -axeln. 4p

7. En bakteriepopulation modelleras med hjälp av differentialekvationen

$$P'(t) = \frac{1}{2}P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{1000} \right).$$

a) Ge två olika lösningar till differentialekvationen som båda innebär att man har ett konstant antal individer i populationen hela tiden. 1p

b) Argumentera för att vilken populationstorlek man än börjar med, bortsett från de två du gav i a), så har man en monoton utveckling, dvs antingen för evigt växande eller för evigt avtagande populationsstorlek. Var går gränsen mellan de två fallen? 2p

c) Avgör för vilka populationstorlekar som populationsgrafens är konvex uppåt respektive konvex neråt. 3p

8. En stor rektangulär duk med bredden 6 meter och höjden 12 meter viks en gång så att nedre högra hörnet precis når någonstans på den vänstra längsidan av duken. Vilken är den kortaste längd som vecket kan få? 6

Lycka till önskar Samuel