MATEMATIK Hjälpmedel: Inga
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tentamen 2017-04-10 kl. 14:00–18:00
Telefonvakt: Samuel Bengmark telefon.: 031-772 5302
Betygsgränser 3:a 20 poäng, 4:a 30 poäng, 5:a 40 poäng, max: 50 poäng

Lösningsförslag till Matematisk analys — LMA400

OBS: Tänk på att det huvudsakligen är beräkningar och motiveringar som ger poäng!

Teori

1. Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt så är den också kontinuerlig där. 5p

Lösning:
Se sida 157 i Stewart.

2. Visa att integralen av en summa är summan av integralerna, dvs att

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

5p

Lösning:
Se sida 386 i Stewart.

Problem

3. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{x^2-2x-15}{x^2-25}$ 2p

Lösning:

$$\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{x^2-2x-15}{x^2-25} = \lim_{x\longrightarrow 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x+3)}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

b) $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ 2p

Lösning:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{\cancel{4}+\cancel{x}-\cancel{4}}{\cancel{x}(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{4}$$

c) $\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^3+5x^2}{\sqrt{2x^6+7x^3}}$ 2p

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^3+5x^2}{\sqrt{2x^6+7x^3}} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3(2+\frac{5}{x})}{\sqrt{x^6}\sqrt{2+\frac{7}{x^3}}} \overset{x\geq 0}{=} \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3}(2+\overset{\nearrow 0}{\frac{5}{x}})}{\cancel{x^3}\sqrt{2+\frac{7}{x^3}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

4. Beräkna följande integraler

(a) $\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$
Lösning:
Vi observerar att integranden är en rationell funktion där dock täljarens grad inte är lägre än nämnarens. Innan vi kan göra partialbråksuppdelning måste vi därför göra en polynomdivision, eller göra följande omskrivning som ger samma resultat.

$$\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2-1+1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}$$

Nu fortsätter vi med partialbråksuppdelning.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+A-B}{(x-1)(x+1)}$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = & A+B \\ 1 = & A-B. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A & = \frac{1}{2} \\ B & = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vi får därför följande.

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int 1 + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx = x + \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

(b) $\int \tan(x)\ln(\cos(x))\,dx$
Lösning:

$$\begin{aligned} \int \tan(x)\ln(\cos(x))\,dx &= \int \frac{1}{\cos(x)}\ln(\cos(x))\,\sin(x)dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} u = \ln(\cos x) \\ du = \frac{1}{\cos x}\cdot -\sin x dx = -\tan x\,dx \end{array} \right) = \\ &= -\int u\,du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{1}{2}\ln^2(\cos x) + C \end{aligned}$$

5. Lös diffekvationerna

(a) $y'' - 2y' - 15y = 0$ där $y'(0) = 7$ och $y(0) = 3$
Lösning:
Detta är en linjär homogen differentialekvation med konstanta koefficienter. Tar fram dess karakterista ekvation och finner dess rötter.

$$r^2 - 2r - 15 = 0 \Rightarrow r_1 = 5, r_2 = -3$$

Eftersom vi har två olika lösningar ges den allmänna lösningen till differentialekvationen av

$$y(x) = Ae^{5x} + Be^{-3x}$$

Eftersom vi då har att $y'(x) = 5Ae^{5x} - 3Be^{-3x}$ ger begynnelsevärdena att

$$\begin{cases} 3 = y(0) = A + B \\ 7 = y'(0) = 5A - 3B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

Den efterfrågade lösningen är därför $y(x) = 2e^{5x} + e^{-3x}$

(b) $(x^2 + 1)y' + xy = 0$ 3p
Lösning:
Då $x^2 + 1 > 0$ finner vi att

$$(x^2 + 1)y' + xy = 0 \Longrightarrow y' = \frac{x}{x^2 + 1}y = 0.$$

Detta är en linjär differential ekvation av första ordning som vi alltså löser med integrerande faktor.

$$I(x) = e^{\int \frac{x}{x^2+1}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = e^{\ln\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Vi tittar nu på derivatan av produkten $y(x)I(x)$.

$$\left(y\sqrt{x^2 + 1}\right)' = y'\sqrt{x^2 + 1} + y\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\underbrace{(y'(x^2 + 1) + yx)}_{\text{VL i diffekv.}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \underbrace{0}_{\text{HL}} = 0$$

Att derivatan är noll innebär att funktionen är konstant, dvs $y\sqrt{x^2 + 1} = C$. Vi har funnit att

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(c) $y' = 1 + x + y + xy, y(0) = 3$ 4p
Lösning:
Det är först inte uppenbart vilken typ av diffekvation detta är, men det kan ses både som en linjär och som en separabel. Väljer här att se den som en separabel diffekvation.

$$y' = 1 + x + y + xy = (1 + x)(1 + y) \Longrightarrow \frac{y'}{1 + y} = 1 + x, \text{ då } y \neq -1.$$

Detta ger sambandet

$$\int \frac{1}{1 + y} = \int 1 + x \Longrightarrow \ln|1 + y| = x + \frac{x^2}{2} + C \Longrightarrow |1 + y| = e^{x + \frac{x^2}{2}}e^C \Longrightarrow 1 + y = e^{x + \frac{x^2}{2}}K$$

Slutsatsen är att $y(x) = Ke^{x + \frac{x^2}{2}} - 1$. Vi använder nu begynnelsevärdet och finner att $3 = y(0) = K - 1$ vilket ger att $K = 4$, dvs $y(x) = 4e^{x + \frac{x^2}{2}} - 1$ (som aldrig blir -1).

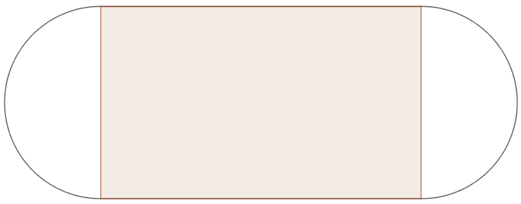
6. Visa att en sfär med radie r har volymen $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ genom att rotera en halvcirkel med radie r kring x-axeln.

Lösning:

Vi använder skivmetoden där vi får cirkelskivor ortogonala mot x-axeln som vid x har radien $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, dvs skivor med area $A(x) = y^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$. Vi integrerar dessa från $x = -r$ till $x = r$ och får volymen

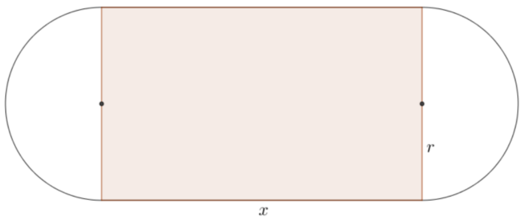
$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx == \pi \left[r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = 2\pi(r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{4\pi}{3}r$$

7. En friidrottsarena skall konstrueras. Det är bestämt att den skall ha en 400 meter lång bana bestående av två halvcirklar samt av två parallella rakor som är lika långa (se bild). Bestäm banans mått så att det rektangulära området innanför banan (färgat i bilden nedan) blir så stort som möjligt. Beräkna sedan hur banan skulle se ut om man ville maximera hela området innanför banan, inklusive cirkelskivorna. 6p



Lösning:

Vi inför beteckningarna x för rakornas längder och r för halvcirklarnas radier.



Den funktion vi skall maximera är arean av rektangeln, dvs $A = x \cdot 2r$. Vi vet att banan skall vara 400 meter, dvs att $400 = 2x + 2\pi r \Longrightarrow x = 200 - \pi r$. Vi skall alltså maximera funktionen

$$A = x \cdot 2r = (200 - \pi r)2r = -2\pi r^2 + 400r.$$

Detta är en andragradsekvation med negativ koefficient framför r^2 vilket betyder att den har precis en maximipunkt precis på symmetrilinjen, alternativt då derivatan är noll, dvs då

$$0 = A' = -4\pi r + 400 \Longrightarrow r = \frac{100}{\pi}, \text{ vilket ger att } x = 200 - \pi\frac{100}{\pi} = 100.$$

Om vi istället skall maximera hela arean innanför banan så är det $A = x \cdot 2r + r^2\pi$ som skall maximeras. Banans omkrets ger fortfarande att $x = 200 - \pi r$ vilket ger att vi skall maximera

$$A = -2\pi r^2 + 400r + R^2\pi = -\pi r^2 + 400r.$$

Detta andragradspolynom har nollställen vid $r = 0$ och $r = \frac{400}{\pi}$ varför maxpunkten finns vid $\frac{400}{2\pi} = \frac{200}{\pi}$. Detta innebär att $x = 200 - \pi\frac{200}{\pi} = 0$ dvs att banan urartar till en cirkel utan rakor.

8. En elastisk boll fylls med luft med en hastighet av 40 cm^3/s.

a) Hur fort ändras bollens radie i det ögonblick då radien är 10 cm?
Lösning:
Vi låter t beteckna tiden och $r(t)$ vara bollens radie viden tiden t. Volymen, som en funktion av tiden, ges då av

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}(r(t))^3.$$

Derivering ger att

$$V'(t) = \frac{4\pi}{3}3(r(t))^2r'(t) = 4\pi(r(t))^2r'(t)$$

Vi löser ut $r'(t)$ och använder att $V'(t) = 40$ för alla t och att vid den sökta tidpunkten t_0 gäller att $r(t_0) = 10$ för att finna att

$$r'(t_0) = \frac{V'(t_0)}{4\pi(r(t_0))^2} = \frac{40}{4\pi 10^2} = \frac{10}{\pi}.$$

Radien förändras alltså med $\frac{10}{\pi}$ cm/s i just detta ögonlick.

b) Beräkna andraderivatan av radien med avseende på tiden i det ögonblick då radien är 10 cm. Motivera med hjälp av andraderivata att grafen för radien, som en funktion av tiden, är konvex ned medan bollen fylls på.
Lösning:
Vi använder implicit derivering och ser att

$$V''(t) = 4\pi 2r(t)r'(t) \cdot r'(t) + (r(t))^2r''(t) \Longrightarrow r''(t) = -\frac{2r(t)(r'(t))^2}{(r(t))^2} = -\frac{2(r'(t))^2}{r(t)}$$

Vid tiden t_0 finner vi att

$$r''(t_0) = -\frac{2(r'(t))^2}{r(t)} = -\frac{2(\frac{10}{\pi})^2}{10} = -\frac{20}{\pi^2}$$

Eftersom både nämnaren (en radie) och täljaren (en kvadrat) är positiva för alla t medam bollen pumpas finner vi att andraderivatan är negativ, dvs att grafen till r(t) är konvex nedåt.

Samuel