Matematisk analys LMA400

1.3.35) Låt $f(x) = \sqrt{x+1}$ $g(x) = 4x-3$. Bestäm $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ och deras definitionsmängder.

Lösn: Vi har $D_f = [-1, \infty)$ $D_g = \mathbb{R}$

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{4x-3+1} = \sqrt{4x-2}$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = [\frac{1}{2}, \infty)$

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = 4\sqrt{x+1} - 3$

$D_{g \circ f} = D_f = [-1, \infty)$

c) $f \circ f(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x+1}+1}$

$D_{f \circ f} = D_f = [-1, \infty)$

d) $g \circ g(x) = g(g(x)) = 4(4x-3) - 3 = 16x - 15$

$D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

1.5.61) Bakteriepopulation beskrivs av $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$

a) Bestäm inversen till $n(t)$

b) När har populationen nått $n = 50\,000$?

Lösn: a) $n = 100 \cdot 2^{t/3}$

$$\log_2 n = \log_2(100 \cdot 2^{t/3})$$

$$= \log_2(100) + \underbrace{\log_2(2^{t/3})}_{= t/3}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{3} = \log_2 n - \log_2(100) = \log_2\left(\frac{n}{100}\right)$$

$$\Rightarrow t = 3\log_2\left(\frac{n}{100}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(n) = 3\log_2\left(\frac{n}{100}\right)$$

b) Tiden då $n = 50000$ ges av

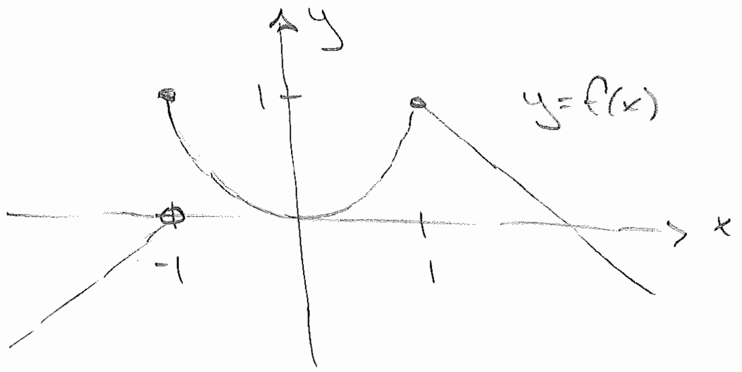
$$t = f^{-1}(50\,000) = 3\log_2\left(\frac{50\,000}{100}\right) =$$

$$= 3\log_2(500) \approx 27\ h$$

2.2.11) Skissa grafen till $f(x) = \begin{cases} 1+x & , x<-1 \\ x^2 & , -1 \le x \le 1 \\ 2-x & , x>1 \end{cases}$

bestäm a så att $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar.

Lösn: Skissa grafen



$D_f = \mathbb{R}$

$\underline{x=1}$: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

$\underline{x=-1}$: $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to -1} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)$ existerar för $a \neq -1$

2.3.27) Beräkna $\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$ om det existerar.

Lösn: $\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ $= \lim_{x\to 16} \frac{(4-\sqrt{x})(4+\sqrt{x})}{x(16-x)(4+\sqrt{x})}$

$$= \lim_{x\to 16} \frac{\cancel{(16-x)}}{x\cancel{(16-x)}(4+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 16} \frac{1}{x(4+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{1}{16\cdot(4+4)} = \frac{1}{16\cdot 8} = \frac{1}{128}.$$

2.5.13) Använd def. av kontinuitet för att visa att $p(v) = 2\sqrt{3v^2+1}$ är kont. i $a=1$

Lösn. Def. $p(v)$ kont. i a om $\lim_{v\to a} p(v) = p(a)$

$$\lim_{v\to 1} p(v) = \lim_{v\to 1}\left(2\sqrt{3v^2+1}\right) = 2\lim_{v\to 1}\sqrt{3v^2+1}$$

$$= \left\{ \lim_{x\to a} (f(x))^{m/n} = L^{m/n} \quad (+\text{ villkor}) \right\}$$

$$= 2\sqrt{\lim_{v\to 1}(3v^2+1)} = 2\sqrt{3\lim_{v\to 1} v^2 + \lim_{v\to 1} 1}$$

$$= 2\sqrt{3\cdot 1^2+1} = 2\sqrt{4} = 4 = p(1)$$

$\boxtimes$

2.6.47) Bestäm asymptoter till $y = \dfrac{5+4x}{x+3}$

Lösn: Låt $f(x) = \dfrac{5+4x}{x+3}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Lodrät asymptot:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{\overbrace{(5+4x)}^{<0}}{\underbrace{(x+3)}_{<0}} = \infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{(5+4x)}{\underbrace{(x+3)}_{>0}} = -\infty$$

$\Rightarrow$ $x = -3$ lodrät asymptot

Vågrät asymptot:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5}{x} \overset{\to 0}{} + 4}{1 + \frac{3}{x} \to 0} = 4$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{5}{x} \overset{\to 0}{} + 4}{1 + \frac{3}{x} \to 0} = 4$$

$\Rightarrow$ $y = 4$ vågrät asymptot