2.8.57) Låt $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

a) Bestäm $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ för $a \neq 0$

b) Visa att $f'(0)$ inte existerar

c) Visa att $y = \sqrt[3]{x}$ har vertikal tangent i $(0,0)$

Lösn: a) $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x^{1/3} - a^{1/3})}}{\cancel{(x^{1/3} - a^{1/3})}(x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{(x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})} = \frac{1}{3a^{2/3}} \quad (a \neq 0)$$

b) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$

$\Rightarrow \nexists$ gränsvärde $\Rightarrow \nexists\, f'(0)$ !

c) Vertikal tangent om $f$ kont. och

$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ kont i $x = 0$ och $f(0) = 0$

dvs $(0,0)$ ligger på $y = \sqrt[3]{x}$

$\lim_{x \to 0} |f'(x)| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{3x^{2/3}} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3x^{2/3}} = \infty .$

3.1.35) Bestäm ekvation för tangenten till

$y = x + \frac{2}{x}$ i punkten $(2, 3)$

Lösn: Tangentens lutning: $f'(x_0)$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Tangentens ekvation: $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\Rightarrow y - 3 = f'(2)(x-2) = \frac{1}{2}(x-2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

3.3.5) Bestäm derivatan av $g(t) = t^3 \cdot \cos t$

Lösn: Produktregeln: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$g'(t) = \frac{d}{dx}(t^3) \cdot \cos t + t^3 \cdot \frac{d}{dx}(\cos t)$$

$$= 3t^2 \cdot \cos t + t^3 \cdot (-\sin t)$$

$$= 3t^2 \cos t - t^3 \sin t$$

$$= t^2 (3 \cos t - t \sin t)$$

3.4.15) Bestäm derivatan av $f(t) = e^{at} \cdot \sin(bt)$

Lösn. Kedjeregeln: $(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right)$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(t) = e^{at} \cdot \frac{d}{dt}(at) \sin(bt) + e^{at} \cos(bt) \cdot \frac{d}{dt}(bt)$$

$$= a e^{at} \sin(bt) + b e^{at} \cos(bt)$$

$$= e^{at} \left( a \sin(bt) + b \cos(bt) \right)$$