3.5.31) Bestäm tangenten till $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$ i punkten $(3,1)$

Lösn: Derivera implicit map x

$$4(x^2+y^2)(\cancel{2}x+\cancel{2}yy') = 25(\cancel{2}x-\cancel{2}yy')$$

$$\Rightarrow \quad 4yy'(x^2+y^2) + 25yy' = 25x - 4x(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{25x - 4x(x^2+y^2)}{25y + 4y(x^2+y^2)}$$

I punkten $(3,1)$: $y' = \dfrac{75-120}{25+40} = -\dfrac{9}{13}$

Tangentens ekv. $y - 1 = -\frac{9}{13}(x-3)$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$$

3.6.19) Bestäm derivatan till $f(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

Lösn: $f(x) = \ln(e^{-x}(1+x)) = \ln e^{-x} + \ln(1+x)$

$$= -x + \ln(1+x)$$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x+1}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$$

3.8.3) Bakteriekultur har $P(0)=100$ vid $t=0$

och växer enl. $\frac{dP}{dt}=kP$. Vid $t=1$ h

har populationen ökat till $P(1)=420$

a) Bestäm uttryck för $P(t)$ $[t]=h$

b) Bestäm $P(3)$

c) Bestäm $P'(3)$

d) Bestäm när $P(t)=10\,000$

Lösn:

a) $\frac{dP}{dt}=kP \Rightarrow P(t)=P(0)e^{kt}=100e^{kt}$

$P(1)=100e^{k}=420$

$\Rightarrow k=\ln\left(\frac{420}{100}\right)=\ln 4.2$

$\Rightarrow P(t)=100e^{t\cdot\ln 4,2}=100\cdot(4,2)^t$

b) $P(3)=100\cdot(4,2)^3 \approx 7409$ bakterier

c) $\frac{dP}{dt}=kP \Rightarrow \left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=3}=kP(3)=$

$=\ln 4,2\cdot P(3)\approx 10\,632$ bakt/h.

d) $P(t)=100\cdot(4,2)^t=10000$

$\Rightarrow 4,2^t=100 \Rightarrow t=\frac{\ln 100}{\ln 4,2}\approx 3,2$ h

4.1.59) Bestäm globalt max och min för

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ln x \quad \text{på} \quad [\tfrac{1}{2}, 4]$$

Løsn: Bestäm kritiske punkter

$$f'(x) = -2\frac{1}{x^3}\ln x + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$f'(x)$ eksisterer $\forall x \in [\frac{1}{2}, 4]$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\ln x = 0$$

$$= \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{1/2} = \sqrt{e} \in [\tfrac{1}{2}, 4]$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2} = 4(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2) = -4\ln 2$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln e^{1/2}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e} \approx 0{,}184$$

$$f(4) = \frac{\ln 4}{4^2} = \frac{\ln 4}{16} \approx 0{,}087$$

$\therefore$ $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$ globalt max på $[\frac{1}{2}, 4]$

$f(\frac{1}{2}) = -4\ln 2$ globalt min — " —

4.2.5) Verifiera att $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ på $[-1, 3]$ uppfyller villkoren i Rolles sats och bestäm alla c som uppfyller påståendet i satsen.

<u>Lösn:</u> I) f polynom $\Rightarrow$ f kont. på $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f kont. på $[-1, 3]$

II) f polynom $\Rightarrow$ f deriverbar på $\mathbb{R}$

f " på $(-1, 3)$

III) $f(-1) = 2 + 4 + 5 = 11$ $\quad f(3) = 18 - 12 + 5 = 11$

$\Rightarrow f(-1) = f(3)$

$\therefore$ $f(x)$ på $[-1, 3]$ uppfyller villkoren i Rolles

Vi söker sedan $c \in (-1, 3)$ s.a. $f'(c) = 0$

$f'(c) = 4c - 4 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (-1, 3)$

$\Rightarrow$ $c = 1$ uppfyller påståendet i Rolles sats

4.3.51) Bestäm, för $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$,

a) vertikala och horisontella asymptoter

b) intervall där f växande resp. avtagande

c) lokala max/min

d) intervall där f konvex resp. konkav
och ev. infl. pkt.

e) kvalitativt utseende för f's graf

Lösn: a) $\lim_{x\to\infty} \overbrace{\sqrt{x^2+1} - x}^{[\infty-\infty]} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\cancel{x^2}+1) - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1} + x}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$

$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \infty \quad \Rightarrow \quad y=0$ horisontell asymptot

$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow$ inga vertikala asymptoter

b) $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} 2x - 1 = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}_{<1 \ \forall x\in\mathbb{R}} - 1 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ (strängt) avtagande $\forall x \in \mathbb{R}$

c) Från b) följer att lokala max/min saknas

d) $f''(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} 2x}{x^2+1}$

$= \dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{3/2}} = \dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f konvex $\forall x \in \mathbb{R}$, inga infl. pkt.

e)