Teori-PM, LMA400 Matematisk analys 18/19

Vid tentamen ska man kunna definiera, förstå och använda alla begrepp och funktioner som ingår i de avsnitt i kurslitteraturen som anges i föreläsningsprogrammet på kurshemsidan. Alla satser som ingår ska kunna formuleras och användas vid problemlösning.

Nedanstående satser och påståenden är dessutom lämpliga att förstå i detalj och kunna bevisa vid tentamen. Sidhänvisningar avser 8:e upplagan av kursboken av Stewart.

1. Om f och g har gränsvärden $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$ så gäller att
$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$$
(Stewart, s. 95 och s. 111).

2. Om f är deriverbar i en punkt a, så är f också kontinuerlig i a (Stewart, s. 156-157). Man ska också kunna ge exempel som visar att det omvända inte gäller.

3. Produktregeln för derivering: Om f och g är deriverbara i punkten x gäller att
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
(bevis nedan).

4. Att
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
(Stewart, s. 191-192).

5. Rolles sats (Stewart, s. 287).

6. Medelvärdessatsen (Stewart, s. 288-289).

7. Om f är deriverbar på intervallet (a, b) och $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$, så är f konstant på (a, b) (Stewart, s. 290-291).

8. Analysens huvudsats (Stewart, s. 394-397).

9. Substitutionsregeler för integraler (Stewart, s. 412-413 (indefinit) och s. 416 (definit)).

10. Partiell integration: Om f och g är deriverbara gäller
$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$
(Stewart, s. 472).

Bevis av 3: Låt f och g vara deriverbara i x. Från derivatans definition följer att

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right)
\end{aligned}$$

Eftersom f, g deriverbara i x gäller

(i) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existerar

(ii) $g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ existerar

(iii) g kontinuerlig i x, dvs $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

Från räknereglerna för gränsvärden följer då

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

■