

MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
LMA400 – Matematisk analys

Tentamen: 2019-01-18, 14.00–18.00

Telefonvakt: Fredrik Ohlsson, 031-772 5305

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt

Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.

Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

TEORI

1. Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$, deriverbar på (a, b) , och uppfylla $f(a) = f(b)$. Visa att det existerar ett tal $c \in (a, b)$ sådant att $f'(c) = 0$. (5p)

2. Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$. Visa att

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

där F är en godtycklig primitiv funktion till f , d.v.s. $F' = f$. (5p)

RÄKNING

3. Beräkna gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 7x} - 3x)$, (2p)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x)$. (2p)

4. Beräkna integralerna

(a) $\int \frac{\sin(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} dx$, (3p)

(b) $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 - 4} dx$, (3p)

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$. (3p)

5. Lös differentialekvationerna

(a) $y' = 2e^x \sqrt{y}$, $y > 0$, $y(0) = 4$, (3p)

(b) $y' + y = \cos(x)$, $y(0) = 0$, (3p)

(c) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. (3p)

Var god vänd!

PROBLEMLÖSNING

6. Beräkna lutningen hos följande kurvor i de angivna punkterna:

(a) $y = \cos(\arctan(x))$ i $x = 1$, (2p)

(b) $x^2e^y + x^5 = xy$ i $(x, y) = (-1, 0)$. (2p)

För full poäng i (a) skall svaret förenklas så att det inte innehåller några trigonometriska funktioner.

7. De räta linjerna $y = x$, $y = 6 - 2x$ och $y = (3 - x)/2$ innesluter en triangel som roteras ett varv kring y -axeln. Beräkna volymen av rotationskroppen. (7p)

8. Låt $a > 0$ vara en konstant. Bestäm koordinaterna för den punkt på kurvan

$$y = \frac{1}{x^a}, \quad x > 0$$

som ligger närmast origo. (Tips: Den punkt som minimerar avståndet till origo minimerar också avståndet i kvadrat.) (7p)

Lycka till!
Fredrik & Christian