MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

LMA400 – Matematisk analys

Tentamen: 2019-08-29, 08.30–12.30
Telefonvakt: Fredrik Ohlsson, 031-772 5305
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt
Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.
Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

TEORI

1. Visa att om f, g har gränsvärdena $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$ gäller att (5p)

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M\,.$$

2. Visa att om f, g är deriverbara gäller att (5p)

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

RÄKNING

3. Beräkna gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$, (2p)

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3}$. (2p)

4. Beräkna, eller förklara varför man inte kan beräkna, integralerna

(a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, (3p)

(b) $\int \dfrac{5x}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$, (3p)

(c) $\int_0^1 x^2 e^{2x} + x\,\mathrm{d}x$. (3p)

5. Lös differentialekvationerna

(a) $yy'(1+x^2) = x$, $y(0) = 2$, (3p)

(b) $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, (3p)

(c) $y' + \sin(x)y = \sin(x)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. (3p)

Var god vänd!

Problemlösning

6. Beräkna lutningen hos följande kurvor i de angivna punkterna:

(a) $y = \sin(\pi x + \arctan(x))$ i $x = 1$, (2p)

(b) $\sqrt{x} - e^y = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) y$ i $(x, y) = (1, 0)$. (2p)

För full poäng på uppgiften skall svaren förenklas så att de inte innehåller några trigonometriska funktioner.

7. Arean under grafen av funktionen $f(x) = \frac{1+\sin(x)}{x}$ mellan $x = 1$ och $x = +\infty$ roteras ett varv kring x-axeln och bildar en rotationskropp med volym V. Skriv ned en integral som beräknar V. Visa sedan att $V \leq 4\pi$. (Tips: Kom ihåg att $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.) (7p)

8. En cylindrisk behållare med total area (d.v.s. mantelarean plus arean för lock och botten) A skall tillverkas. Bestäm dimensionerna som maximerar behållarens volym och beräkna den maximala volymen. (7p)

Lycka till!
Fredrik & Christian