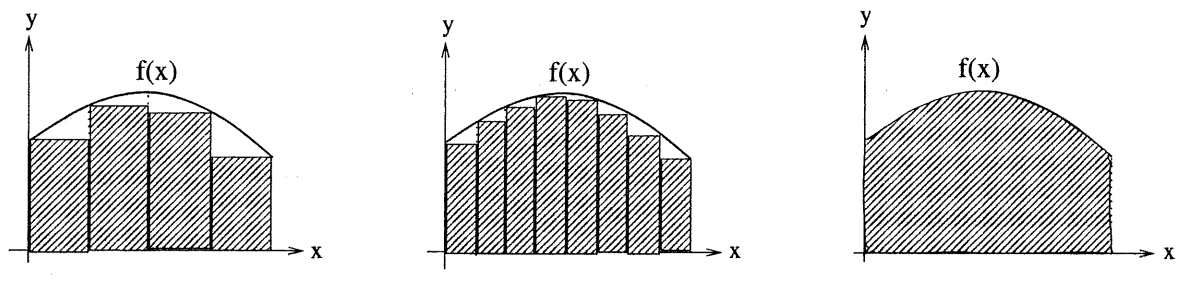
Utdrag ur: M. Asadzadeh: Analys och linjär algebra, Studentlitteratur 2007

KAPITEL 5

Integraler

5.1 Definition

Vår utgångspunkt för definitionen av begreppet integral är problemet att beräkna arean av ett område i planet. Idén till en lösning av detta problem fanns redan i antiken (Archimedes). Man tänker sig att man försöker täcka områdets area med allt mindre och mindre rektanglar så att skillnaden mellan den verkliga arean och rektanglarnas sammanlagda area successivt blir mindre och mindre och närmar sig gränsvärdet 0. Vi skall koncentrera oss på det speciella problemet att beräkna arean under funktionsytan $y = f(x)$, där vi inledningsvis antar att $f(x) \geq 0$.



Figuren illustrerar idén. Det streckade området i den högra figuren är "området under funktionskurvan $y = f(x)$" och dess area A är gränsvärde av de sammanlagda areorna av allt smalare och smalare rektanglar som figuren antyder. Nu måste vi emellertid beskriva idén lite exaktare.

Antag att $f(x)$ är en icke-negativ funktion ($f(x) \geq 0$) på intervallet $[a, b]$. Vi börjar med att dela upp intervallet i n lika delintervall. Varje delintervall har alltså längden $\Delta x = (b - a)/n$. Sätt

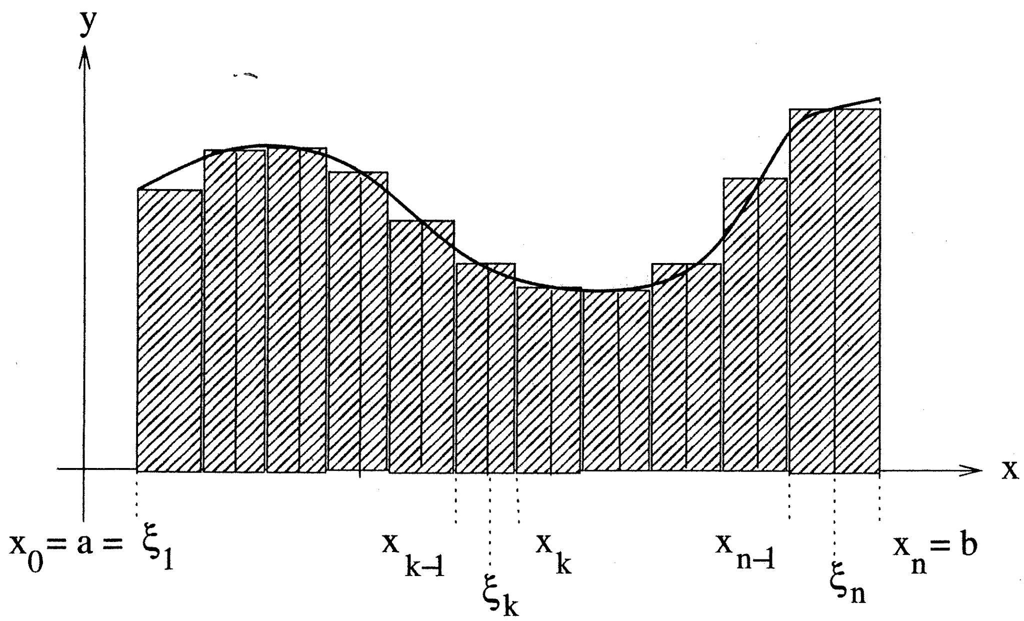
$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_n = a + n\Delta x = b.$$

I varje delintervall $[x_{k-1}, x_k], (k = 1, \ldots, n)$ väljer vi sedan ut en punkt ξ_k och bildar därefter

Riemannsumman

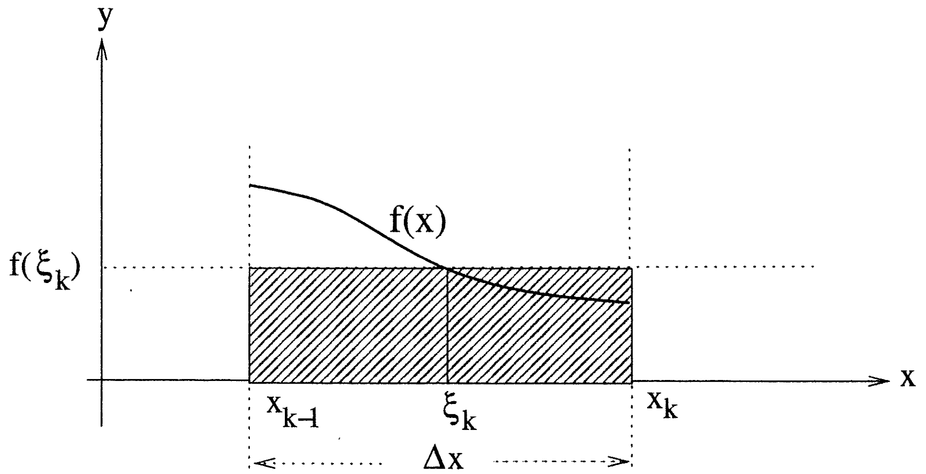
$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x. \tag{5.1}$$

(Riemann var en tysk matematiker på slutet av 1800-talet.)



R_n = summan av areorna av de streckade rektanglarna.

Observera att talet $f(\xi_k)\Delta x$ är en rektangelarea, nämligen arean av den rektangel som står på intervallet $[x_{k-1}, x_k]$.



Antag nu att vi gör successiva indelningar av intervallet $[a, b]$ och låter $n \to \infty$. Det kan då inträffa att följden R_n av Riemannsummor konvergerar mot ett bestämt gränsvärde J. Om vi får samma gränsvärde oberoende av hur vi väljer punkterna $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ säger vi att funktionen f är *Riemannintegrerbar*. Talet J kallas då för *integralen av* f på intervallet $[a, b]$ och skrivs

$$J = \int_a^b f(x)dx.$$

Vi har alltså

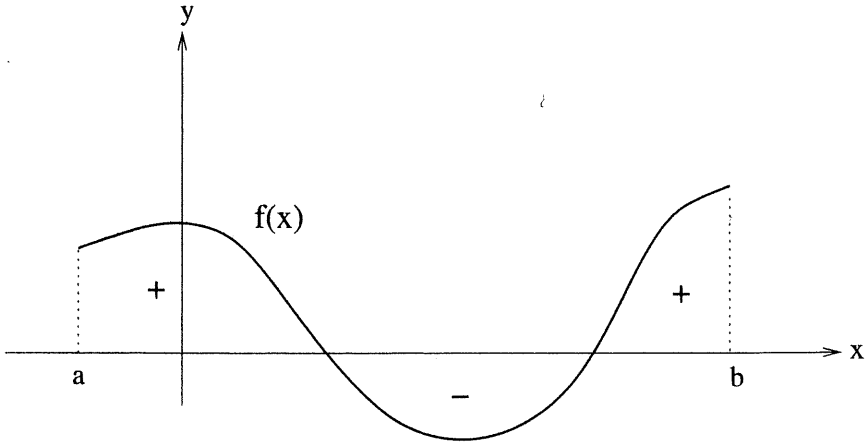
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x.$$

Beteckningen för integralen är vald för att påminna om denna definiton. Symbolen $\int$ är ett stiliserat S (för summa) och dx har fått ersätta $\Delta x = (b - a)/n$. Man kan visa följande sats.

SATS 1

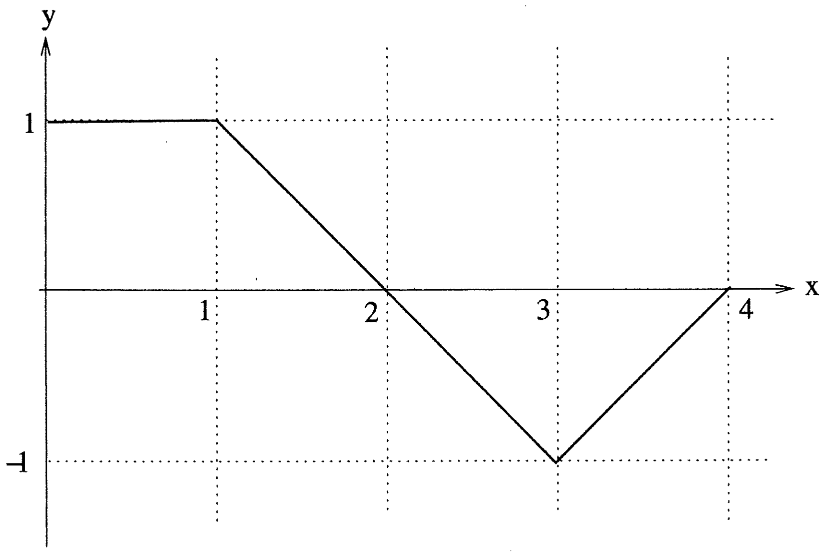
Alla kontinuerliga funktioner på ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ *är Riemannintegrerbara.*

I vårt definition utgick vi från en icke-negativ funktion och vårt syfte var att beräkna en area. Vi tillämpar emellertid definitionen även på negativa funktioner, eller funktioner med varierande tecken. Man kan fortfarande tolka integralen som arean av det område som stängs in mellan funktionskurvan och x-axeln, men arean av områden under x-axeln skall räknas med minustecken, så som figuren nedan antyder.



EXEMPEL 1.

Låt oss definiera funktionen $f(x)$ på intervallet $[0,4]$ genom att rita dess funktionskurva:



Då är

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}, \int_2^3 f(x)dx = -\frac{1}{2}, \int_3^4 f(x)dx = -\frac{1}{2},$$

vilket ger $\int_0^4 f(x)dx = 1 + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$ □

5.4 Räkneregler

Om man tänker på integralen som gränsvärde av summor blir flera räkneregler naturliga, exempelvis

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \tag{5.2}$$

$$\int_a^b (k\cdot f(x))dx = k\cdot \int_a^b f(x)dx, \quad (k \text{ konstant}). \tag{5.3}$$

Observera också att

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{5.4}$$

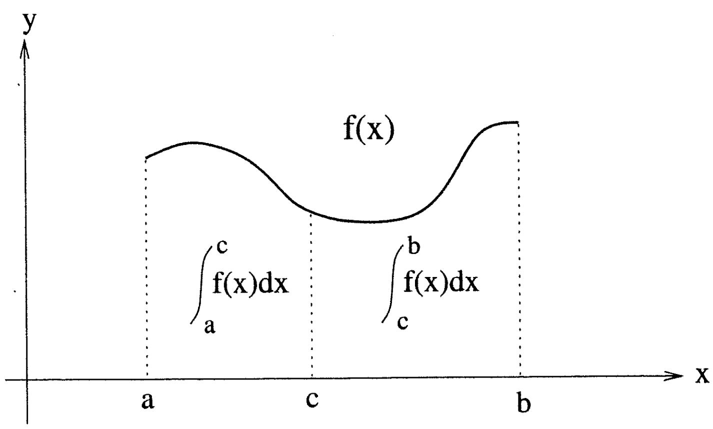
vars geometriska innebörd illustreras enligt figuren på nästa sida.

I vår definition av $\int_a^b f(x)$ har vi underförstått att $a < b$. Det kan emellertid vara praktiskt att inte förutsätta detta. Om $a > b$ sätter vi

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Detta ger

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$



Med dessa konventioner fungerar räkneregeln (5.4) även om talet c inte ligger mellan a och b.

Integralkalkylens fundamentalsats

Vi ska nu formulera och bevisa den viktiga sats som ger sambandet mellan bestämd och obestämd integral.

Sats (Integralkalkylens fundamentalsats)**.** *Låt f vara en kontinuerlig funktion på ett intervall $[a,b]$. Då gäller följande:*

I. Funktionen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

är en primitiv funktion till f på $[a,b]$, dvs $F'(x) = f(x)$.

II. Om G är en primitiv funktion till f på $[a,b]$, så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Del II av satsen används flitigt för att beräkna integraler. Vi introducerar därför den praktiska beteckningen

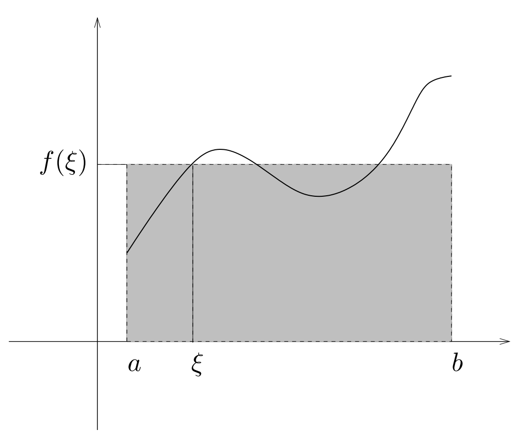
$$[G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

I beviset av integralkalkylens fundamentalsats spelar följande sats en betydande roll.

Sats (Integralkalkylens medelvärdessats)**.** *Om f är en kontinuerlig funktion på ett intervall $[a,b]$, så finns en punkt ξ, $a \le \xi \le b$, sådan att*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Integralkalkylens medelvärdessats kan, om vi antar att f är icke-negativ, tolkas geometriskt som att arean av området mellan f:s graf och x-axeln är lika stor som arean av en rektangel med basen $b-a$ och höjd given av ett lämpligt funktionsvärde $f(\xi)$ (se figur).



Funktionsvärdet $f(\xi)$ kan då tolkas som medelvärdet av f på $[a, b]$, därav namnet på satsen. Beviset för integralkalkylens medelvärdessats ligger dock utanför ramen för denna kurs.

Bevis för integralkalkylens fundamentalsats. I. Enligt derivatans definition är

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right), \end{aligned}$$

vilket enligt räkneregel (5.4) är lika med

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Enligt integralkalkylens medelvärdessats är

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)(x + h - x) = h f(\xi_h)$$

för något tal ξ_h mellan x och $x + h$. När h går mot 0 så går ξ_h mot x, så

$$F'(x) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x),$$

eftersom f är kontinuerlig. Alltså är F deriverbar med derivatan f.

II. Enligt I är $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ en primitiv funktion till f på $[a, b]$. Då måste, enligt en tidigare sats,

$$G(x) = F(x) + C \tag{1}$$

för någon konstant C. För att bestämma C sätter vi in $x = a$ i (1) och får $C = G(a)$. Sätter vi nu in $x = b$ i (1), så får vi $G(b) = F(b) + G(a)$, dvs

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = G(b) - G(a).$$

□

Ur M. Asadzadeh: Analys och linjär algebra

5.3 Några tillämpningar

I vår definition av begreppet integral har vi utgått från problemet att beräkna arean av ett område. Men integralbegreppet har flera andra användingar. Vi ger här några exempel. För ytterligare exempel se Kapitel 10, 5A-5F.

EXEMPEL 4 (vägen som integralen av hastigheten).

Antag att man förflyttar sig med konstant hastighet v m/sek under t sek. Den tillryggalagda vägsträckan är då s, där

$$s = v \cdot t.$$

Om nu hastigheten varierar med tiden blir situationen mera komplicerad. Säg att hastigheten är $v(t)$ vid tidpunkten t. Vi vill då ta reda på hur lång vägsträcka s, som tillryggalagts under tidsintervallet från $t = a$ till $t = b$ $(a < b)$.

Låt oss dela upp tidsintervallet $[a, b]$ i n st lika delintervall med hjälp av indelningspunkterna $t_k = a + k\Delta t$ där $\Delta t = (b - a)/n$. Om n är tillräckligt stort så är hastigheten ungefär konstant $= v(t_k)$ under tidsintervallet $[t_{k-1}, t_k]$.

Under detta lilla tidsintervall tillryggalägger man alltså sträckan $s_k \approx v(t_k)\Delta t$. Den totala vägsträckan blir därför

$$s = \sum_{k=1}^{n} s_k \approx \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t.$$

Förfinar vi indelningen allt mer får vi som gränsvärde formeln för vägsträckan

$$s = \int_a^b v(t)dt.$$

(Obs. Vi har valt t, som den naturliga beteckningen för tidsvariabeln, medan vi i definitionen av integralbegreppet i stället hade x som variabel.)

EXEMPEL 5 (integralen som arbete).

Antag att en kropp rör sig längs x-axeln från punkten $x = a$ till $x = b$. Kroppen påverkas i punkten x av kraften $f(x)$. Vi antar att kraften verkar parallellt med x-axeln. Om kraften är konstant $=$

k på hela intervallet definieras det arbete som kraften utför som $k \cdot (b-a)$ (kraften gånger sträckan). Om kraften $f(x)$ inte är konstant utan i stället varierar (kontinuerligt) kan vi, till exempel, göra en likformig indelning av intervallet $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Vi betraktar sedan kraften som approximativt konstant $= f(x_k)$ på intervallet $[x_{k-1}, x_k]$. Det arbete som kraften uträttar vid förflyttningen från x_{k-1} till x_k är därför $a_k \approx f(x_k)\Delta x$. Det totala arbetet blir då

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

Förfinad indelning och gränsövergång ger sedan följande formel för det *totala arbetet*:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$