onym kod	LMA515 Matematik del B 170410	Sidnr 1	Poäng

. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $a > 0$ så att arean under grafen $f(x) = x^2 + 5$ mellan $x = 0$ och $x = a$ är hälften så stor som arean mellan $x = a$ och $x = 2a$. (4p)

Lösning:

$$\frac{a^3}{3} + 5a = \frac{1}{2}\left(\frac{(2a)^3}{3} + 5\cdot 2a - \frac{a^3}{3} - 5a\right)$$

$$0 = \frac{5a^3}{3} - 5a$$

Svar: $a = \sqrt{3}$

(b) Bestäm inflexionspunkter till funktionen $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Ange intervall där funktionen är uppåt resp nedåt konkav. (dvs konvex/konkav) (3p)

Lösning:

$2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad 2 - \frac{1}{4}x^{-3/2}$ $\qquad x = \frac{1}{4}$

Svar: CD: $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ $\quad$ CU: $x \geq 1/4$

(c) Ange den primitiva funktion till $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ som uppfyller $F(1) = 2$. (3p)

Lösning:

Svar: $x^{-2}/(-2) - x^{-1}/(-1) + C \qquad C = 3/2$

Var god vänd!

(d) Beräkna $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$. (3p)

Lösning:

Svar: 1/3

(e) Lös differentialekvationen $y'' + 25y = 5 + \cos(4x)$. (3p)

Lösning:

$A\cos 4x + B\sin 4x = y_p$

$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x = y_p''$

$9A\cos 4x + 9B\sin 4x =$

Svar: $C_1\cos 5x + C_2\sin 5x + \frac{1}{5} + \frac{1}{9}\cos 4x$

(2) $\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$ $\quad x \neq -2$

$\to \pm\infty, x \to -2^{\pm}$

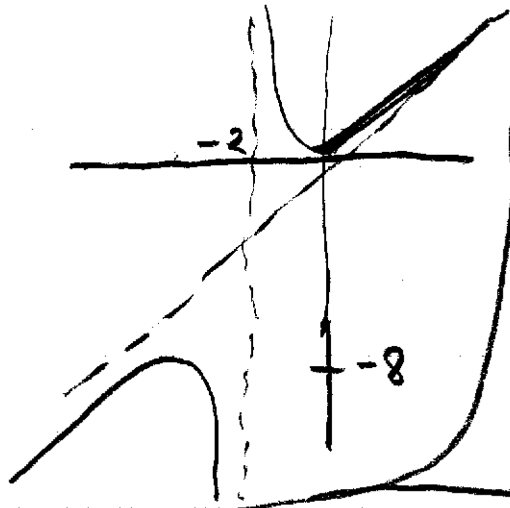
$-4 \quad -2 \quad 0$

$+ \; 0 \; - \quad - \; 0 \; +$

$\nearrow -8 \searrow \quad \searrow 0 \nearrow$

$$\begin{array}{l} x-2 \\ \hline x^2 \;\big|\; x+2 \\ -(x^2+2x) \\ \hline -2x \\ -(-2x-4) \\ \hline 4 \end{array}$$

$y = x-2$



(3) $\int \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2}$

$\left[\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}\right]_1^{\infty} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 3$

(4) $\frac{e^{-3x}}{-3} + e^{-2x} + C$

$-1/3 + 1 + C = 2$

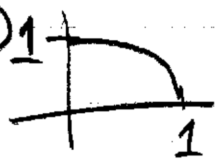
$1 - 2e^{x} = 0$

$x = -\ln 2$

$+ \quad -$

$\nearrow \quad \searrow$

(5)



$x: \int \pi y^2 dx = \pi\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

$y: \int \pi x^2 dy = \pi\int(1-y^2)^2 dy$

$= \pi\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8\pi}{15}$

(6) $f' - 2xf = xe^{x^2}$

$(e^{-x^2}f)' = x$

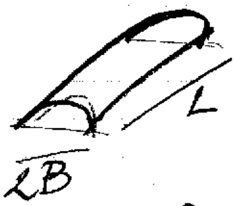
$f = e^{x^2}(x+C)$

$e = e(1+C)$ $\quad C=0$

(7) i $\int \frac{t^2-1}{1+t^2} = \int 1 - \frac{2}{1+t^2} \ldots$

ii $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^4} \quad \frac{-1}{9}(x^3+1)^{-3}$

(8)



$A = 2\pi B^2 + 2\pi BL$

$V = \frac{\pi B^2}{2}L$

$L = \frac{A - 2\pi B^2}{2\pi B} \Rightarrow V = V(B)$

$V'(B) = \ldots$

(9) $F'(t) = kf(t)(M - f(t))$

$f(0) = 1$

$\frac{dy}{y(M-y)} = k\,dt$

$\ldots$