Anonym kod	LMA515 Matematik del B 170818	Sidnr	Poäng
		1	

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $0 < a < 1$ så att arean under grafen $f(x) = \sqrt{x}$ mellan $x = 0$ och $x = a$ är lika så stor som arean mellan $x = a$ och $x = 1$. (4p)

Lösning:

$$\int_0^a \sqrt{x}\,dx = \int_a^1 \sqrt{x}\,dx \qquad a\sqrt{a} = 1 - a\sqrt{a}$$

$$2a^{3/2} = 1 \qquad a = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$$

Svar: $a = (1/2)^{2/3}$

(b) Bestäm inflexionspunkter till funktionen $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{x}$. Ange intervall där funktionen är uppåt resp nedåt konkav. (dvs konvex/konkav) (3p)

Lösning:

$$f' = 3x^2 + \frac{3}{x^2} \qquad f'' = 6x - \frac{6}{x^3} = \frac{6(x^4-1)}{x^3}$$

$$f'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x		-1		0		1	
	$-$		$+$		$-$		$+$

Svar: Konkav: $x < -1$, $0 < x < 1$ konvex: $-1 < x < 0$, $x > 1$

(c) Ange den primitiva funktion till $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} - 3x^{-4}$ som uppfyller $F(1) = 5$. (3p)

Lösning:

$$F(x) = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - 3\frac{x^{-3}}{-3} + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} + C \qquad -2+1+C=5 \quad C=6$$

Svar: $F(x) = -2/\sqrt{x} + 1/x^3 + 6$

Var god vänd!

(d) Beräkna $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx$. (3p)

Lösning:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x - \sin^4 x)\cos x \, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right\} = \int_0^1 (t^2 - t^4)\, dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

Svar: ....

(e) Lös differentialekvationen $y'' - 25y = 5 + e^{4x}$. (3p)

Lösning:

$y_h : r^2 - 25 = 0 \quad r = \pm 5$

$y_h = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$

$y_p = A + Be^{4x}$

$y_p' = 4Be^{4x} \quad y_p'' = 16Be^{4x}$

$16Be^{4x} - 25A - 25Be^{4x} = 5 + e^{4x}$

$-25A = 5 \quad 16B - 25B = 1 \quad A = \frac{-1}{5} \; B = -\frac{1}{9}$

Svar: $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x} - 1/5 - 1/9\, e^{4x}$

2 $x \neq \pm 1$ $\quad \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^3}{x^3(1-\frac{1}{x^2})} \to 2 \quad f(x) - 2x = \frac{2x}{x^2-1} \to 0$

$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to -1^\pm} = \pm\infty \quad y = 2x$ sned asymp

$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - 2x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2} \quad f' = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$

$-\sqrt{3} \quad -1 \quad 1 \quad \sqrt{3} \quad x$

$+ \quad - \quad - \quad - \quad +$

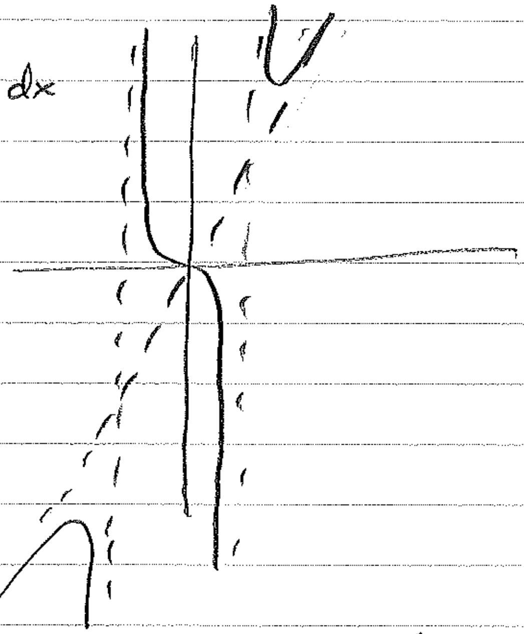
$f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$ lok max

$f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$ lok min

3 $\left[\frac{e^{-2x}}{-2}(x^2+1)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{-2}\cdot 2x\,dx$

$= \frac{1}{2} + \left[\frac{e^{-2x}}{-2}x\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{-2}dx$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

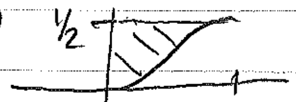


4 $f' = 6e^{-3x} - 5e^{-5x}$

$f = -2e^{-3x} + e^{-5x} + C \quad -2 + 1 + C = 7 \quad C = 8$

$6 - 5e^{-2x} = 0 \quad x = -\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5} \quad f'(0) = 1$

$f'(-1) = 6e^3 - 5e^5 < 0$

5 

$y: \int_0^1 2\pi x\left(\frac{1}{2} - y\right)dx = \pi\int_0^1\left(x - \frac{2x^2}{1+x}\right)dx$

$= \pi\left(\frac{1}{2} - \int_1^2 \frac{2(t-1)^2}{t}dt\right) = \pi\left(\frac{1}{2} - \left[t^2 - 4t + 2\ln t\right]_1^2\right)$

$= \pi\left(\frac{1}{2} - 2\ln 2 + 3\right)$

$x: \int_0^1\left(\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \pi y^2\right)dx = \frac{\pi}{4} - \pi\int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t^2}dt = \frac{\pi}{4} - \pi\left[t - 2\ln t - \frac{1}{t}\right]_1^2$

$\frac{\pi}{4} - \pi\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right) = \pi\left(2\ln 2 - \frac{5}{4}\right)$

6 $f' - x^2 f = 2x^2 \quad \left(e^{-\frac{x^3}{3}} f\right)' = 2x^2 e^{-\frac{x^3}{3}}$

$e^{-\frac{x^3}{3}} f = -2e^{-\frac{x^3}{3}} + C \qquad 1 = -2 + C$

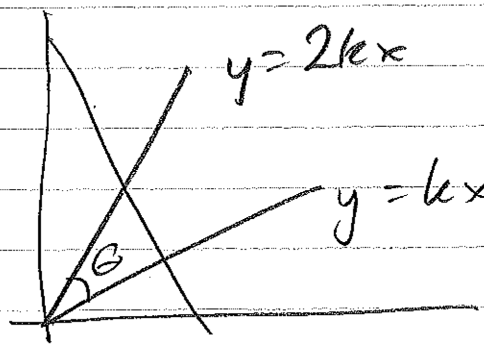
$C = 3$

$f = -2 + 3e^{-x^3/3}$

7 $\int \frac{\cos 2x}{1+\tan x} = \int \frac{\cos 2x \cos x}{\sin x + \cos x} = \ldots$

$\int \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x^4 + 1}\, dx = \ldots$

8

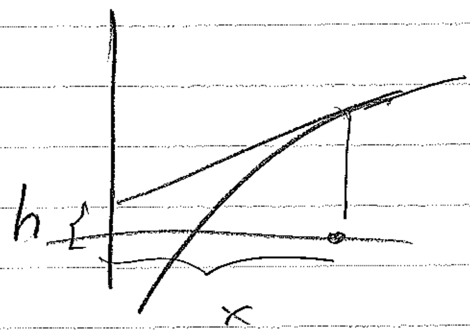


Area = hela − delar

$\frac{dA}{dk} = \ldots$

$\frac{d\cos\theta}{dk} = \ldots$

9



$\int_0^x y(t)\, dt = h \cdot x$

$\frac{d}{dx}: \ldots$