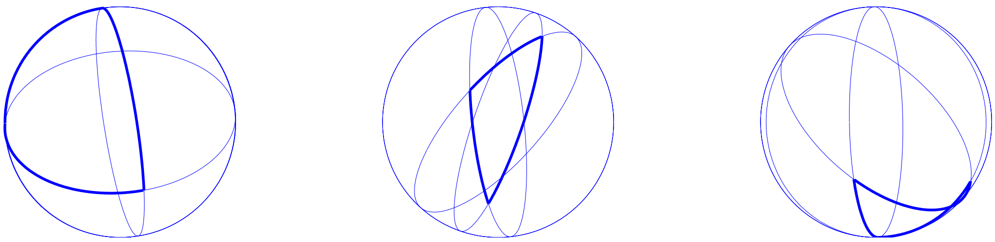
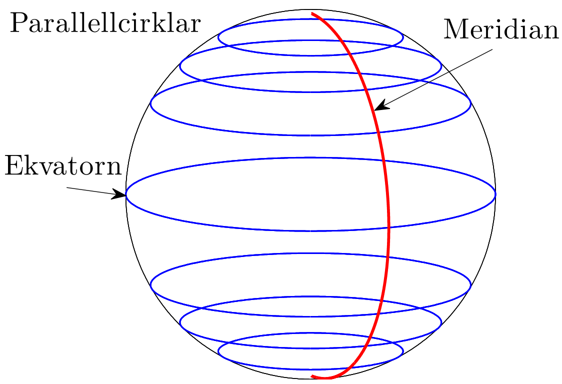
Sfärisk trigonometri

Inledning

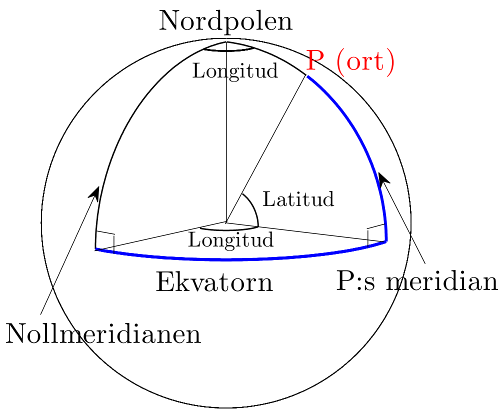
Vi vill använda den sfäriska trigonometrin för beräkningar på storcirkelrutter längs jordytan (för sjöfart och luftfart). En *storcirkel* är en cirkel på sfären vars medelpunkt sammanfaller med sfärens medelpunkt. *Om man vill förflytta sig på sfären mellan två av dess punkter, så är den kortaste vägen alltid en storcirkelbåge.* I den sfäriska trigonometrin studerar man sambandet mellan sidor och vinklar i *sfäriska trianglar*, dvs trianglar vilkas sidor utgörs av *storcirkelbågar* på en sfär.



Andra cirklar än storcirklar på sfären har mindre radier och kallas därför småcirklar. Observera att småcirkelbågar aldrig är sidor i sfäriska trianglar!
Vi väljer en axelriktning uppåt i figuren och använder oss av latitud och longitud för att ange lägen på sfären. En viktig typ av cirklar är *parallellcirklarna*, dvs cirklar med konstant latitud. Endast ekvatorn är en storcirkel, övriga parallellcirklar är småcirklar. En *meridian* är en halv storcirkel med konstant longitud.

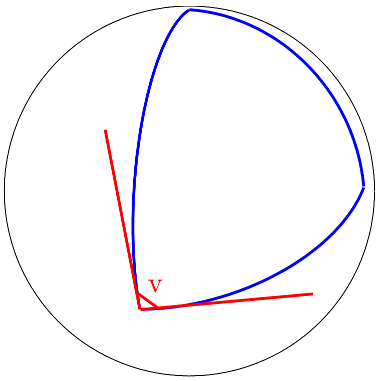


Även om det troligen är bekant för läsaren, summerar vi lite om latitud och longitud. För en ort P ser vi hur dessa vinklar refererar till läget för två fundamentala storcirklar: ekvatorn respektive nollmeridianen (genom Greenwich). Latituden anges positiv norrut, negativ söderut (eller så markerar man med N eller S). Den varierar därmed mellan $-90°$ och $90°$ (polerna). Longituden anges positiv österut, negativ västerut (eller så markerar man med E eller W). Longituden varierar mellan $-180°$ och $180°$.

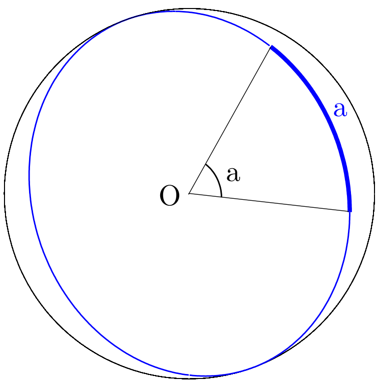


När vi talar om *vinkeln* mellan två skärande storcirklar menar vi vinkeln mellan cirklarnas tangenter i skärningspunkten. I figuren nedan markeras en hörnvinkel i en sfärisk triangel.

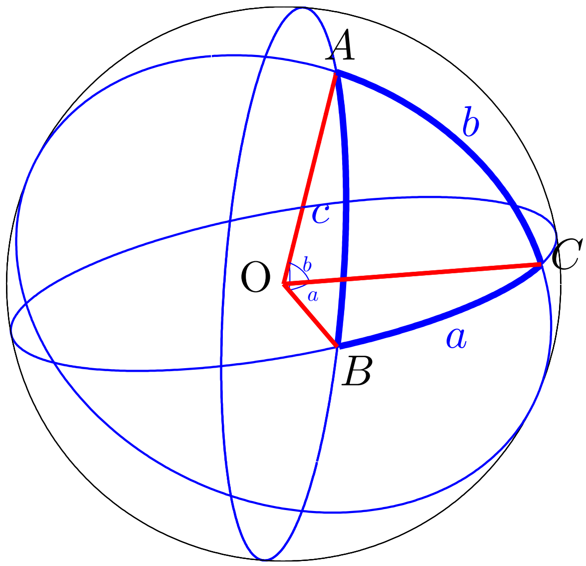
Anm: Denna vinkel är också vinkeln mellan de plan som de två storcirklarna ligger i. I denna kurs har vi dock inte arbetat med plan och deras inbördes vinklar och vi behöver inte göra det heller i fortsättningen.



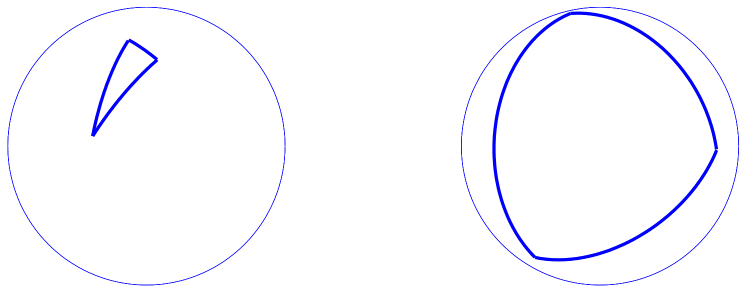
Om sfärens radie sätts till 1 och om vinkeln mäts i *radianer*, så är storcirkelbågens längd lika med centrumvinkeln. Om man istället räknar med vinkelenheten *minut*, där 1' (1 minut) =1/60 grad, så får man direkt storcirkelbågens längd på jordsfären i nautiska mil (nautisk mil kallas ju också för distansminut!). I fortsättningen anger vi därför storcirkelbågen som en vinkel (se figuren nedan!), och kan då lätt tolka den som en distans: är t ex bågen $60° = 3600'$ så är distansen längs storcirkeln 3600 M (= nautiska mil).



I fortsättningen är det underförstått att alla storcirkelbågar och sfäriska trianglar ligger på en *sfär med radien 1.* Vi använder en standard för beteckningar motsvarande den vi hade i den plana trigonometrin. Som framgår av figuren nedan betecknas den sfäriska triangelns hörn och hörnvinklar med A, B och C, medan de motstående sidorna betecknas a, b och c - de uttrycks också med vinkelmått enligt föregående. Sfärens medelpunkt är O.



Observera att vinkelsumman i en sfärisk triangel alltid är *större* än 180°! Den kan i själva verket närma sig 540°. Om triangeln är mycket liten, är den nästan plan och vinkelsumman är då obetydligt mer än 180°. Den vänstra figuren visar en sådan triangel, den högra visar en triangel vars vinkelsumma är betydligt större än 180°. En stor vinkelsumma svarar alltid mot en stor omkrets av den sfäriska triangeln.



Anmärkning: Det finns en enkel formel som ger oss den sfäriska triangelns area T (dvs arean av den sfäriska yta som begränsas av den sfäriska triangeln), den s. k. Girards formel:

$$T = A + B + C - \pi$$

Här måste *vinklarna anges i radianer* (det går förstås med grader, men då blir formeln fulare). Om det gäller att beräkna arean av en sådan triangel på en sfär av radien R, behöver man bara multiplicera med R^2. Vi kommer knappast att använda formeln i denna kurs, men för den intresserade finns beviset av Girards formel i Appendix.

För plana trianglar är det väl känt att storleksordningen mellan sidorna är densamma som mellan de motstående vinklarna. Motsvarande kan visas gälla även för sfäriska trianglar:

$$a < b \iff A < B$$

$$a = b \iff A = B$$

En skillnad gentemot plana trianglar är värd att nämna. Om man känner alla sidorna i en plan triangel, kan man bestämma alla triangelns vinklar (med cosinussatsen). Om man däremot känner alla vinklarna, kan man bara bestämma förhållandet mellan sidorna. Det finns då likformiga trianglar som har motsvarande vinklar lika. För sfäriska trianglar däremot, kan man både bestämma vinklarna när man känner alla sidorna och bestämma sidorna när man känner alla vinklarna. Det finns alltså inte två likformiga sfäriska trianglar med alla motsvarande vinklar lika men med olika stora sidor. Detta hänger förstås ihop med att de sfäriska trianglarna ligger i en sfärisk yta med bestämd radie. Om man reser till månen, kan man på dess yta hitta en sfärisk triangel som är likformig med en på jordytan men har mindre sidor. I den sfäriska trigonometrin måste man dock hålla sig till samma sfäriska yta för att kunna räkna på ett rimligt sätt, det naturliga valet av radie blir då 1 (som vi ju redan har valt).

Några exempel på problem som kan lösas med sfärisk trigonometri:
Man färdas på havet längs storcirkeln mellan två punkter A och B med givna latituder och longituder. Hur långt är då avståndet mellan A och B längs denna rutt? Vilken kurs ska man starta i och vilken kurs håller man då man når B? Var på resan finns den nordligaste eller sydligaste punkten och på vilken latitud? Ytterligare problemtyper kommer att dyka upp i senare navigationskurser.

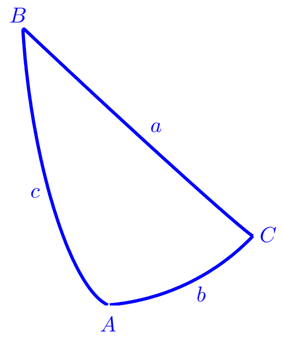
För att kunna lösa dessa och andra problem, behöver vi ett par satser. Dessa motsvarar sinus- och cosinussatserna från den plana trigonometrin och liknar i viss mån dessa. De ges här utan bevis, men åtföljda av exempel. Bevisen finns för den intresserade i ett Appendix. Det finns ytterligare en mängd formler och regler inom den sfäriska trigonometrin, men målet är här att ge en grundläggande förståelse. Vi nöjer oss därför med de sfäriska sinus- och cosinussatserna.

Sfäriska sinussatsen

I varje sfärisk triangel gäller att

$$\boxed{\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}}$$

Exempel 1: I en sfärisk triangel är $A = 95°,\ B = 38°$ och $a = 37°$. Beräkna sidan b.



Lösning:
Vi kan fastställa att eftersom $A > B$ så är även $a > b$.
Enlig sinussatsen har vi

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A} \ \Rightarrow\ \sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A} \ \Rightarrow\ b \approx 21,8°$$

Fallet $b \approx 180° - 21,8°$ är inte möjligt, eftersom $B < A \ \Rightarrow\ b < a = 37°$.

Vi har funnit att sidan $b \approx 21,8°$.

Sfäriska cosinussatsen

I varje sfärisk triangel gäller att

$$\boxed{\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C}$$

Specialfall: om vinkeln C är rät, får man

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

vilket är den sfäriska motsvarigheten till *Pythagoras sats*.

Eftersom cosinus alltid ger entydigt besked om vinkeln, är sfäriska cosinussatsen att föredra framför sfäriska sinussatsen om det är möjligt.

Anmärkning: Det finns en närbesläktad formel, den s. k. *duala cosinussatsen:*

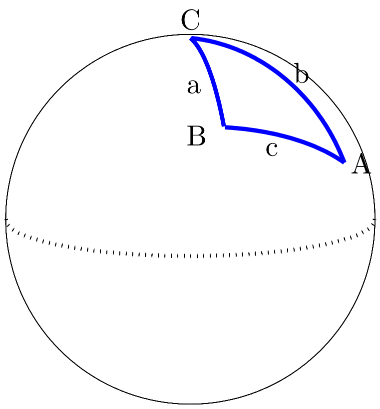
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

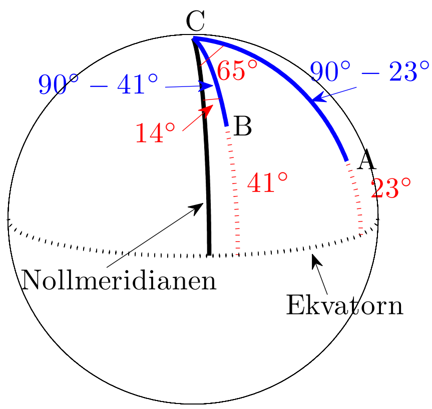
som är intressant, eftersom den visar att man kan beräkna alla sidorna om man vet alla vinklarna, vilket tidigare framhållits som en skillnad gentemot situationen för plana trianglar.

Exempel 2:
(a) Beräkna avståndet längs jordytan mellan en ort A med latitud $N23°$, longitud $E65°$ och en annan ort B med latitud $N41°$, longitud $E14°$.
(b) Beräkna kursen man ska hålla, dels vid avresan från A och dels vid ankomsten till B.

Lösning:
I detta och liknande problem med storcirkelrutter bildar man en användbar sfärisk triangel med hörn i start A och mål B samt i nordpolen C (figuren nedan till vänster). Observera också att longituden för en ort blir lika med hörnvinkeln i nordpolen mellan nollmeridianen och ortens meridian. Därmed blir vinkeln i hörnet C lika med *longituddifferensen* mellan orterna A och B.

(a) Vi ritar upp situationen, dels en figur med den nämnda sfäriska triangeln, dels en figur som belyser hur latitud och longitud ger oss sidor och vinklar i triangeln.





Då känner vi genom latituderna sidorna $AC = b = 90° - 23 = 67°$ och $BC = a = 90° - 41° = 49°$ samt genom longituderna vinkeln $C = 65° - 14° = 51°$ (se högra figuren!). Cosinussatsen ger nu

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C =$$

$$= \cos 49° \cos 67° + \sin 49° \sin 67° \cos 51°$$

vilket ger $c \approx 46{,}089° = 46{,}089 \cdot 60' \approx 2765'$, dvs avståndet är 2765 M.

(b) De efterfrågade kurserna blir nu (rita själv figurer!): $360° - A$ respektive $B + 180°$.
För att få vinkeln A går det bra att använda sinussatsen, men man får då avgöra om det är det spetsiga eller trubbiga lösningsalternativet till sinusekvationen som ska väljas. Observera också att vi inte har någon bestämd vinkelsumma att utnyttja, och det kan faktiskt finnas mer än en trubbig vinkel i den sfäriska triangeln! Därför tar vi istället cosinussatsen, som ger säkert besked:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \;\Rightarrow\; A \approx 54{,}5°$$

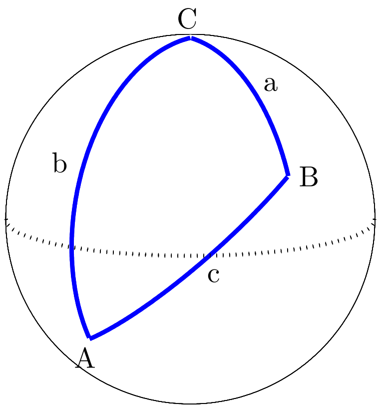
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \;\Rightarrow\; B \approx 96{,}8°$$

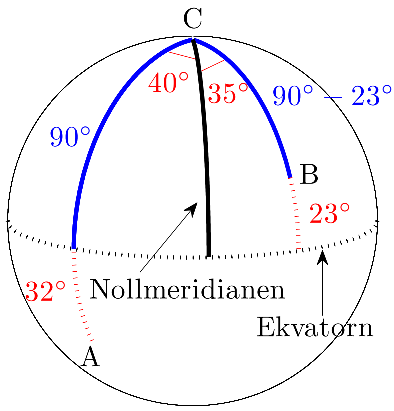
Därmed är kursen vid resans start $360° - A \approx 305{,}5°$ och vid dess mål $B + 180° \approx 277°$.
Vi noterar även att vinkelsumman i triangeln ABC är $\approx 202{,}3°$.

Svar: Avståndet är 2765 M, de sökta kurserna är $305{,}5°$ respektive $277°$.

Exempel 3: Vi ställer nu samma frågor som i föregående exempel då vi startar i en ort A med latitud $S32°$, longitud $W40°$ och anländer till en ort B med latitud $N23°$, longitud $E35°$.

Lösning:
När vi har orter på olika sidor om nollmeridianen eller på olika sidor om ekvatorn får vi se upp med vinklarna. Man kan räkna precis som i förra exemplet om sydliga latituder och västliga longituder räknas negativa. Annars ser vi hur det blir om vi ritar figurer motsvarande dem i exempel 2.





Vi betraktar den sfäriska triangeln med nordpolen C och de två orterna A och B som hörn (figuren till vänster). Då får vi sidorna $BC = a = 90° - 23 = 67°$ och $AC = b = 90° + 32° = 122°$ samt vinkeln $C = 35° + 40° = 75°$ (se högra figuren!). Cosinussatsen ger nu

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C =$$
$$= \cos 67° \cos 122° + \sin 67° \sin 122° \cos 75°$$

vilket ger $c \approx 90,287° = 90,287 \cdot 60' \approx 5417'$, dvs avståndet är 5417 M.

Vi beräknar nu vinklarna A och B för att få kurserna. Den här gången ser vi att (rita igen!) startkursen blir A och målkursen blir $180° - B$.
Cosinussatsen igen:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \;\Rightarrow\; A \approx 62,8°$$

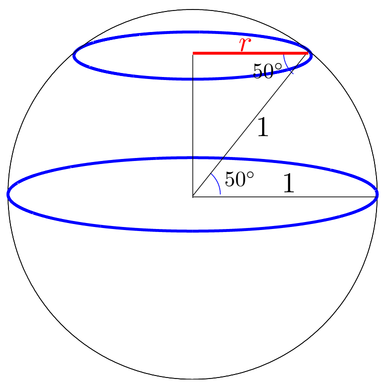
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \;\Rightarrow\; B \approx 125,0°$$

Därmed är kursen vid resans start $A \approx 62,8°$ och vid dess mål $180° - B \approx 55,0°$.

Svar: Avståndet är 5417 M, de sökta kurserna är $62,8°$ respektive $55,0°$.

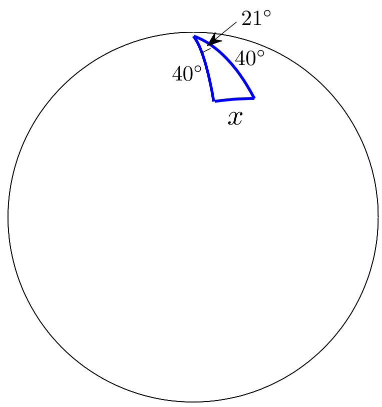
Exempel 4: Två orter befinner sig på samma latitud 50°. Longituddifferensen mellan orterna är 21°.
(a) Hur långt är det mellan orterna längs parallellcirkeln mellan dem?
(b) Hur långt är det mellan orterna längs storcirkeln mellan dem? Detta är också minsta avståndet längs jordytan.

Lösning:
(a) En minuts longitudsdifferens svarar inte mot samma sträcka på parallellcirkeln med latitid 50° som på ekvatorn. Vi tar reda på förhållandet mellan dessa genom att beräkna radien i parallellcirkeln (ekvatorsradien sätts till 1), se figuren!



Vi ser då att parallellcirkelns radie måste vara $r = \cos 50°$, så detta är den faktor vi måste multiplicera longituddifferensens minuter med för att få nautiska mil. Sträckan mellan orterna längs parallellcirkeln blir alltså $21 \cdot 60 \cos 50° \approx 809{,}91$ M.

(b) För att få storcirkeldistansen använder vi liksom i exempel 2 och 3 den sfäriska triangeln med orterna och nordpolen som hörn.



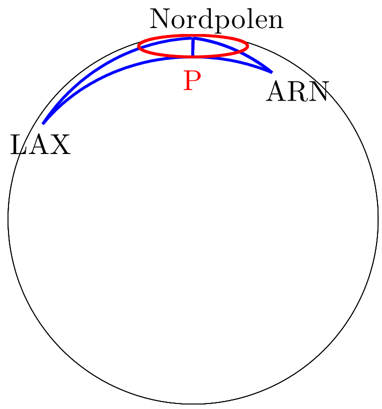
Vi får nu med cosinussatsen

$$\cos x = \cos 40° \cos 40° + \sin 40° \sin 40° \cos 21° \quad \Rightarrow \quad x \approx 807{,}24'$$

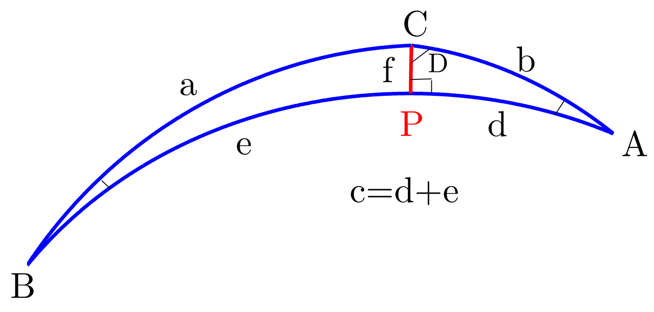
Svar: (a) 809,9 M, (b) 807,2 M.

Exempel 5:
Arlanda flygplats (ARN) har latituden N59°39′ och longituden E17°55′, Los Angeles International Airport (LAX) har koordinaterna N33°57′ och longituden W118°24′.
(a) Hur lång är flygrutten mellan orterna längs storcirkeln? Räkna på havsnivån.
(b) Om man startar i Arlanda, vilken kurs ska man flyga ut i?
(c) Var på storcirkelbågen mellan flygplatserna finns den nordligaste punkten? Ange dess koordinater.

Lösning:
Drag storcirkelbågen mellan nordligaste punkten P och nordpolen. Vi får två sfäriska trianglar att arbeta med, och vinklarna vid P är räta, eftersom storcirkeln där tangerar en parallellcirkel (markerad i figuren).



Vi ser hur stor jorden är, Los Angeles är inte direkt på andra sidan jorden! Vi sätter ARN till A, LAX till B och nordpolen till C och vi gör en lite större figur med själva triangeln:



Med beteckningarna lat$_A$, long$_A$ respektive lat$_B$, long$_B$ för orternas koordinater har vi

$$a = 90°-\text{lat}_B,\ b = 90°-\text{lat}_A,\ C = \text{long}_A\text{-long}_B.$$

Vad behöver vi beräkna? För att svara på (a) vill vi veta sidan c, för (b) räcker det med vinkeln A (kursen blir $360° - A$) och för (c) behöver vi sträckan f (ger oss lat$_P = 90° - f$) och vinkeln D (ger oss long$_P$ =long$_A - D$).

Observera att västlig longitud räknas negativ! Gör om minuter till decimalgrader, t ex $59°39' = (59 + 39/60)°$.

(a) Cosinussatsen ger:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \;\; \Rightarrow \;\; c \approx 79,70^\circ$$

Därmed är avståndet $c \cdot 60$ M $= c \cdot 60 \cdot 1,852$ km ≈ 8856 km. Vill man ta hänsyn till flyghöjden h får man addera $\dfrac{c}{360} 2\pi h$, vilket för $h = 11$km blir ca 15 km.

(b) Cosinussatsen ger oss nu även vinkeln A:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \;\; \Rightarrow \;\; \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \;\; \Rightarrow \;\; A \approx 35,61^\circ$$

Eftersom AC är meridianen genom ARN, så blir kursen vid start $360^\circ - A \approx 324^\circ$.

(c) Triangeln ACP har rät vinkel vid P. Sinussatsen ger då

$$\frac{\sin f}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin b}{1} \;\; \Rightarrow \;\; \sin f = \sin A \sin B \;\; \Rightarrow \;\; f \approx 17,11^\circ$$

Cosinussatsen med rät vinkel (dvs Pythagoras sats för sfärisk triangel) ger

$$\cos b = \cos f \cos d \;\; \Rightarrow \;\; \cos d = \frac{\cos b}{\cos f} \;\; \Rightarrow \;\; d \approx 25,45^\circ$$

och sinussatsen igen:

$$\frac{\sin D}{\sin d} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin b} = \frac{1}{\sin b} \;\; \Rightarrow \;\; \sin D = \frac{\sin d}{\sin b} \;\; \Rightarrow \;\; f \approx 58,28^\circ$$

Nu har vi $\text{lat}_P = 90^\circ - f \approx 72,89^\circ$ och long_P=$\text{long}_A - D \approx -40,36^\circ$. Uttryckt i grader och minuter får vi slutligen att orten P har latitud $72^\circ 53'$N och longitud $40^\circ 22'$W. Denna punkt ligger mitt i den grönländska inlandsisen.

Svar:
(a) 8856 km.
(b) 324°.
(c) $72^\circ 53'$N, $40^\circ 22'$W.

Övningar

Större delen av dessa övningar är hämtade från kompendiet Sfärisk trigonometri av Kjell Börjesson, 1986.

1. Lös ut det som efterfrågas i repektive triangel.
   (a) $a = 34,44°,\ A = 61,55°,\ B = 24,46°$. Beräkna b.
   (b) $b = 68,90°,\ c = 56,85°,\ C = 45,23°$. Beräkna B.
   (c) $a = 31,15°,\ b = 84,32°,\ B = 8,45°$. Beräkna A.
   (d) $c = 28,44°,\ A = 138,25°,\ C = 18,57°$. Beräkna a.
   (e) $a = 55,16°,\ c = 73,68°,\ A = 47,40°$. Beräkna C.

2. Lös ut det som efterfrågas i respektive triangel.
   (a) $a = 40,67°,\ b = 118,32°,\ C = 161,38°$. Beräkna c.
   (b) $a = 69,75°,\ c = 54,53°,\ B = 16,48°$. Beräkna b.
   (c) $a = 107,35°,\ b = 76,19°,\ c = 57,83°$. Beräkna A.
   (d) $a = 79,30°,\ b = 100,20°,\ c = 113,27°$. Beräkna B.
   (e) $a = 43,58°,\ b = 44,17°,\ c = 58,38°$. Beräkna C.
   (f) $a = 87,73°,\ c = 126,16°,\ B = 103,48°$. Beräkna b, A, C.
   (g) $a = 41,17°,\ b = 118,93°,\ C = 163,12°$. Beräkna c, A, B.
   (h) $a = 136,82°,\ b = 102,15°,\ c = 60,15°$. Beräkna A, B, C.
   (i) $a = 95,60°,\ b = 116,87°,\ c = 90,00°$. Beräkna A, B, C.

3. I följande trianglar är $C = 90°$. Beräkna återstående sidor och vinklar.
   (a) $a = 39,16°,\ b = 41,25°$.
   (b) $a = 57,21°,\ b = 49,69°$.
   (c) $b = 121,73°,\ c = 93,17°$.

4. Mellan två fartyg som båda befinner sig på latituden S35° är longitudsskillnaden 60°. Fartygen styr mot varandra längs den gemensamma storcirkeln och B:s fart är hälften av A:s. Beräkna den distans fartyg B har tillryggalagt när de möts.

5. Beräkna storcirkelavståndet mellan en ort på ekvatorn med longitud E45° och en ort med latitud 45° och longitud 0°, dvs på Greenwichmeridianen. (Här kan du använda en rätvinklig triangel!)

6. Mellan två orter på latitud 55° är avståndet 1274 M längs parallellcirkeln. Beräkna det kortaste avståndet längs jordytan mellan orterna.

7. (a) Beräkna storcirkeldistans och utseglingskurs från N35°20′, W74°36′ till N49°10′, W5°14′.
   (b) Beräkna latitud och longitud för storcirkelns nordligaste punkt.

Facit

1. (a) $b \approx 15,45°$
   (b) $B \approx 52,29°$ eller $B \approx 127,71°$
   (c) $A \approx 4,38°$
   (d) $a \approx 84,73°$ eller $a \approx 95,27°$
   (e) $C \approx 59,40°$ eller $C \approx 120,60°$

2. (a) $c \approx 154,62°$
   (b) $b \approx 21,01°$
   (c) $A \approx 121,16°$
   (d) $B \approx 96,60°$
   (e) $C \approx 89,44°$
   (f) $b \approx 102,21°,\ A \approx 96,20°,\ C \approx 126,56°$
   (g) $c \approx 156,27°,\ A \approx 28,37°,\ B \approx 39,17°$
   (h) $A \approx 137,43°,\ B \approx 75,11°,\ C \approx 59,03°$
   (i) $A \approx 96,28°,\ B \approx 117,01°,\ C \approx 92,85°$

3. (a) $c \approx 54,34°,\ A \approx 51,01°,\ B \approx 54,24°$
   (b) $c \approx 69,49°,\ A \approx 63,84°,\ B \approx 54,50°$.
   (c) $a \approx 83,96°,\ A \approx 84,86°,\ B \approx 121,59°$.

4. 967 M

5. 3600 M

6. 1259 M

7. (a) 3077 M, 51,7°
   (b) N 50°13′, W 20°46′