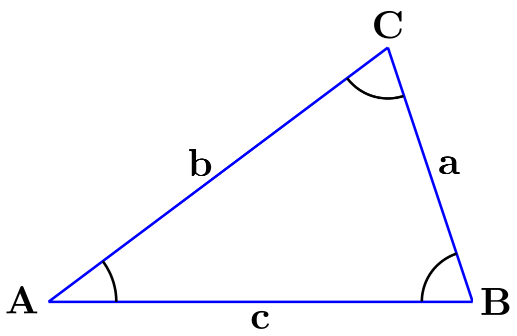
3. Trigonometri

Inledning

Trigonometri betyder triangelmätning. De grundläggande storheterna som vi kan mäta i en triangel är dess sidor och vinklar. Ett bra sätt att beteckna en triangels sidor och hörn framgår av figuren.



Vi använder alltså små bokstäver för sidorna och deras längder och motsvarande stora bokstäver för hörnen mittemot. Samtidigt får de stora bokstäverna också beteckna vinklarna i respektive hörn. Det finns ett enkelt förhållande mellan storlekarna på sidor och vinklar: storleksordningen är densamma mellan sidorna och deras motstående vinklar. Största sidan står mot största vinkeln, minsta sidan står mot minsta vinkeln. T ex i triangeln i figuren gäller att $b > c > a$ och $B > C > A$. Vidare antar vi att det är känt att vinkelsumman i varje triangel är $180°$, dvs ett halvt varv.

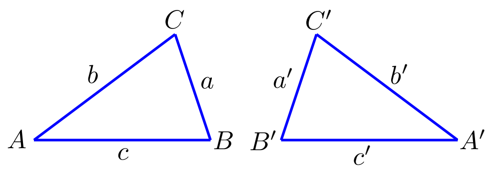
Två specialfall:

- En triangel som har två sidor lika kallas *likbent*. Vinklarna mellan var och en av de lika sidorna och den tredje kallas *basvinklar*. Dessa är alltid lika stora.
- En triangel som har alla tre sidor lika kallas *liksidig*. I en liksidig triangel är alla vinklarna $60°$.

I detta kapitel introduceras de trigonometriska funktionerna och några användbara satser för triangelberäkningar presenteras och används. Först något om två grundläggande begrepp: kongruens och likformighet.

Kongruens

Om det för två trianglar ABC och $A'B'C'$ med motstående sidor betecknade enligt konventionen ovan a, b, c respektive a', b', c' gäller: $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, så sägs trianglarna vara *kongruenta*. De kan därmed få vara spegelvända som i nedanstående figur.



För trianglar gäller de tre s k kongruensfallen:

Kongruensfallen

1. **Sida – vinkel – sida:** *Om $a = a'$, $B = B'$ och $c = c'$ så är trianglarna ABC och $A'B'C'$ kongruenta.*
2. **Sida – sida – sida:** *Om $a = a'$, $b = b'$ och $c = c'$ så är trianglarna ABC och $A'B'C'$ kongruenta.*
3. **Vinkel – sida – vinkel:** *Om $A = A'$, $b = b'$ och $C = C'$ så trianglarna ABC och $A'B'C'$ kongruenta.*

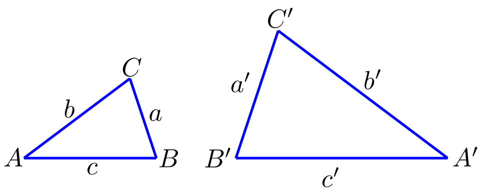
Observera att motsvarigheten till fall 2 *inte* gäller för fyrhörningar: om man klistrat ihop fyra pinnar till en fyrhörning, kan man ”vicka” på konstruktionen och erhålla olika fyrhörningar med samma sidor men med olika vinklar. Detta går förstås inte med en triangel.

Likformighet

Om det för två trianglar ABC och $A'B'C'$ med motstående sidor betecknade enligt konventionen ovan $a,\ b,\ c$ respektive $a',\ b',\ c'$ gäller:

$$A = A', \qquad B = B', \qquad C = C', \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

så sägs trianglarna vara *likformiga*. De kan även nu få vara spegelvända som i figuren, där förhållandet mellan motsvarande sidor är 8:5=1,6. Om man ser den högra triangeln som en likformig avbildning av den vänstra, så är *skalan* 1,6.



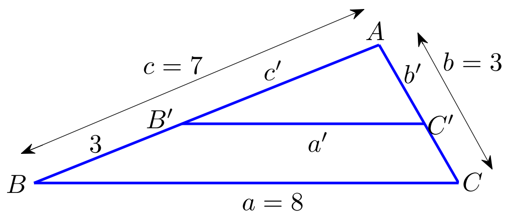
Det finns motsvarigheter till de tre kongruensfallen när det gäller likformighet hos trianglar:

Likformighetsfallen

1. **Sida – vinkel – sida:** *Om* $B = B'$ *och* $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$ *så är trianglarna* ABC *och* $A'B'C'$ *likformiga.*
2. **Sida – sida – sida:** *Om* $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ *så är trianglarna* ABC *och* $A'B'C'$ *likformiga.*
3. **Vinkel – (sida) – vinkel:** *Om* $A = A'$, *och* $B = B'$ *så trianglarna* ABC *och* $A'B'C'$ *likformiga.*

Förutsättningarna i fall 3 innebär att även $C = C'$, eftersom alla trianglar har samma vinkelsumma. Enligt definitionen av likformighet ska dels motsvarande vinklar vara lika, dels förhållandet mellan par av motsvarande sidor vara lika. För *trianglar* innebär likformighetsfall 2 och 3 att den räcker att verifiera den ena av dessa två egenskaper.

Exempel 1: I en triangel ABC med sidorna $a = 8$, $b = 3$ och $c = 7$ drar sträckan mellan sidorna b och c parallellt med sidan a, så att det bildas en mindre triangel $AB'C'$ (se figur). Beräkna sidornas längder i denna så kallade topptriangel om sträckan $BB' = 3$.



Lösning: Då trianglarnas vinklar överensstämmer: A gemensam, $B = B'$, $C = C'$, så är trianglarna likformiga (tredje likformighetsfallet). Först konstaterar vi att $c' = 7 - 3 = 4$, därefter använder vi likformigheten för att bestämma övriga sidor:

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} \quad \Rightarrow \quad a' = a\frac{c'}{c} = 8\frac{4}{7} = \frac{32}{7} \approx 4,57$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad \Rightarrow \quad b' = b\frac{c'}{c} = 3\frac{4}{7} = \frac{12}{7} \approx 1,71$$

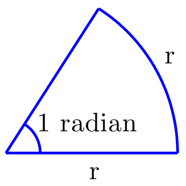
Svar: Sidorna är $a' \approx 4,57,\ b' \approx 1,71,\ c' = 4$.

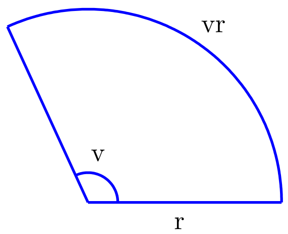
Vinkelenheter

Den mest använda vinkelenheten är nog *grader*. Den är emellertid inte särskilt naturlig, eftersom antalet 360 grader på ett varv känns ganska godtyckligt valt. Talet 360 har dock bra delbarhetsegenskaper, så många naturliga bråkdelar av ett varv svarar mot hela antal grader. Man har också försökt introducera *nygrader (gon)*: 1 varv = 400 nygrader, men 400 har lite sämre delbarhet (t. ex. vinklarna i en liksidig triangel är inte heltal i denna enhet). Om vi släpper delbarhetsaspekten, så är förstås enheten *varv* en naturlig enhet. Men den viktigaste enheten utöver grader har ändå kommit att bli *radianer*. Dess fördel är att den naturligt kopplar ihop cirkelbågens längd med vinkelmåttet.

Definition: Vinkelenheten radian bestäms av att 2π radianer är lika med ett varv.

Detta betyder också att cirkelbågen som har centrumvinkeln v radianer har längden vr radianer, om cirkelns radie är r.





Den vänstra figuren visar hur vinkeln 1 radian svarar mot att radien och cirkelbågen är lika långa. I den högra figuren ser man det generella sambandet mellan vinkelmåttet i radianer och cirkelbågens längd.

I matematiken är radianen den grundläggande vinkelenheten, och den behöver inte sättas ut. Skriver man att en vinkel är 2,5 så förutsätts detta innebära 2,5 radianer. Menar man 2,5 grader, måste man alltid skriva $2,5^\circ$.

Omvandlingar mellan grader och radianer blir enklast om man minns att π radianer är lika med ett halvt varv, dvs 180°. Alltså:

$$\pi = 180^\circ, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

Man uttrycker ofta vinkeln med π som ”enhet”, t. ex. är en rät vinkel lika med $\frac{\pi}{2}$, en 60-gradersvinkel är $\frac{\pi}{3}$. Vinkeln 20° är alltså $20\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$, och $\frac{\pi}{10} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$.

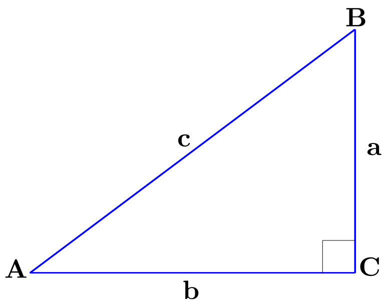
3.1 Rätvinkliga trianglar

En *rät vinkel* är ett kvarts varv $= 90°$, vinklar mellan $0°$ och $90°$ kallas *spetsiga*, vinklar mellan $90°$ och $180°$ kallas *trubbiga*. En *rätvinklig triangel* har en vinkel som är rät, de övriga vinklarna är därmed spetsiga.

I en rätvinklig triangel kallas de två sidor som bildar rät vinkel *kateter*, den återstående (längsta) sidan kallas *hypotenusa*. Vi formulerar en välkänd sats:

> **Pythagoras sats:**
> I varje rätvinklig triangel är, med figurens beteckningar, $a^2 + b^2 = c^2$

I ord uttryckt: *Summan av kateternas kvadrater är lika med kvadraten av hypotenusan.*



Likheten i satsen gäller dessutom *bara för rätvinkliga trianglar*, alltså: om $a^2 + b^2 = c^2$ så är vinkeln C rät. Detta kan man kalla *omvändningen av Pythagoras sats*.

Exempel 2: I en rätvinklig triangel är den ena kateten $a = 126$ cm och hypotenusan är $c = 130$ cm. Då kan vi beräkna den återstående kateten b ur Pythagoras sats:

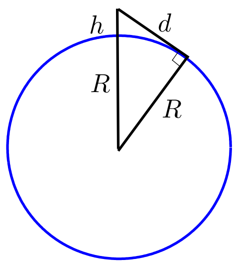
$$126^2 + b^2 = 130^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 130^2 - 126^2 = 1024 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{1024} = 32$$

Alltså: $b = 32$ cm

Exempel 3: En triangel har sidorna $a = 295$, $b = 305$ och $c = 424$. Är den rätvinklig? Om den är rätvinklig ska enligt Pythagoras sats gälla $a^2 + b^2 = c^2$. Här visar det sig att $a^2 + b^2 = 180050$ och $c^2 = 179776$, så triangeln kan inte vara rätvinklig (fast det är ”nära”).

Exempel 4: Vi ställer samma fråga om en triangel har sidorna $a = 297$, $b = 304$ och $c = 425$. Nu visar det sig att $a^2 + b^2 = c^2 = 180625$. Omvändningen av Pythagoras sats gäller (se kommentar ovan): om $a^2 + b^2 = c^2$, så är vinkeln C rät. Denna triangel är alltså exakt rätvinklig.

Exempel 5: Beräkna hur långt det är till den synliga horisonten på öppet hav då ögat befinner sig 15 meter över havsytan. Vi antar att jorden är klotformad med radien 6371 km. (Vi bortser också från atmosfärisk ljusbrytning som ökar avståndet något, varierande med de atmosfäriska förhållandena och sägs i genomsnitt vara ca 8% för måttliga värden på h.)



Lösning: Med beteckningar enligt figuren, som förstås är kraftigt överdriven, har vi en rätvinklig triangel med kateterna d (det sökta avståndet) och R (jordens radie) och hypotenusan $R+h$ (radien plus höjden). Vi sätter in detta i Pythagoras sats (alla längder i enheten meter!):

$$d^2 + R^2 = (R+h)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad d^2 + R^2 = R^2 + h^2 + 2Rh \quad \Longleftrightarrow \quad d^2 = h^2 + 2Rh$$

$$d = \sqrt{h^2 + 2Rh} = \sqrt{15^2 + 2 \cdot 6371000 \cdot 15}\,\mathrm{m} \approx 13825\,\mathrm{m}$$

Svar: Avståndet är ca 14 km.

Anmärkning: i exemplet är h avsevärt mycket mindre än R. Då kan man försumma h^2 i förhållande till $2Rh$ och få den enklare formeln $d \approx \sqrt{2Rh}$ (skiljer bara en knapp cm i vårt exempel), men om h börjar komma in på rymdfartens område, så kan man behöva den exakta formeln.

3.2 De trigonometriska funktionerna i rätvinkliga trianglar

Med utgångspunkt från figuren vid Pythagoras sats definierar vi de *trigonometriska funktionerna*:

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{a}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusa}},\\ \cos A &= \frac{b}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusa}},\\ \tan A &= \frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}},\\ \cot A &= \frac{b}{a} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{motstående katet}}.\end{aligned}$$

Förkortningarna utläses *sinus, cosinus, tangens och cotangens*. Det följer av definitionerna att $\sin A$ och $\tan A$ ökar om A ökar, medan $\cos A$ och $\cot A$ minskar (så länge vinkeln A är spetsig, större vinklar behandlas senare). Vi observerar också gränsfallen 0° och 90° där vi får

$$\sin 0^\circ = \tan 0^\circ = 0, \qquad \cos 0^\circ = 1$$

$$\sin 90^\circ = 1, \qquad \cos 90^\circ = \cot 90^\circ = 0$$

medan tangens inte kan definieras för 90° och cotangens inte kan definieras för 0°.

Vissa samband mellan de olika trigonometriska funktionerna kan också konstateras:

$$\boxed{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cot A}, \qquad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\tan A}}$$

Exempel 6: En triangel med sidorna $a = 3,\ b = 4$ och $c = 5$ längdenheter är rätvinklig, eftersom $3^2 + 4^2 = 5^2$. Den brukar kallas den egyptiska triangeln och ger oss ett lätt sätt att tillverka en vinkelhake. I denna triangel är alltså

$$\sin A = \frac{3}{5},\ \cos A = \frac{4}{5},\ \tan A = \frac{3}{4},\ \cot A = \frac{4}{3}.$$

Med hjälp av miniräknaren kan vi beräkna de trigonometriska funktionerna för en vinkel, men vi kan också ta reda på vinkeln, om man känner en trigonometrisk funktion (åtminstone om vinkeln är spetsig som här). Eftersom det ser ganska olika ut på olika räknare, tar vi detta på undervisningen och inte här i detalj. T ex kan vi få ut vinkeln A i den egyptiska triangeln genom att använda sinusfunktionen enligt ovan. $\sin A = 0,6$ ger då med miniräknarens hjälp att $A \approx 36,9^\circ$.

Vi får också genom att multiplicera med nämnarna i definitionerna att

$$a = c \cdot \sin A, \quad b = c \cdot \cos A, \quad a = b \cdot \tan A.$$

Exempel 7: Antag att sidan $c = 12$cm och vinkeln $A = 52°$. Då kan vi beräkna de återstående sidorna: $a = c \cdot \sin A = 12 \cdot \sin 52° \approx 9,46$cm och $b = c \cdot \cos A = 12 \cdot \cos 52° \approx 7,39$cm.

Exempel 8: Antag att sidan $b = 8$cm och vinkeln $A = 33°$. Då är $\tan A = \frac{a}{b} \Rightarrow$ $a = b \cdot \tan A = 8 \tan 33° \approx 5,20$cm. Vidare är $\cos A = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\cos A} = \frac{8}{\cos 33°} \approx 9,54$cm.

Två vinklar som har summan $90°$ kallas *komplementvinklar*. I vår rätvinkliga triangel är A och $B = 90° - A$ komplementvinklar. Vi tittar lite utförligare på definitionerna av de trigonometriska funktionerna och kan då se:

$$\begin{aligned} \cos(90° - A) &= \sin A, & \sin(90° - A) &= \cos A, \\ \cot(90° - A) &= \tan A, & \tan(90° - A) &= \cot A. \end{aligned}$$

Det finns ett annat enkelt samband mellan sinus och cosinus. Om vi tar likheten $a^2 + b^2 = c^2$ i Pythagoras sats och dividerar båda leden med c^2, får vi

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

dvs uttryckt i sinus och cosinus:

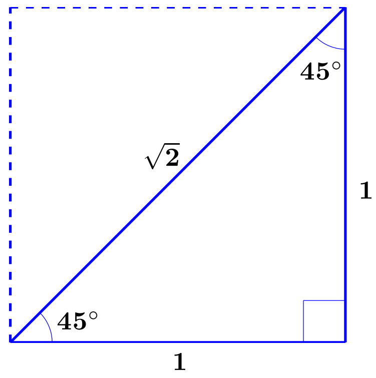
$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

Sambandet brukar kallas *trigonometriska ettan*. Man brukar skriva lite kortare:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

För vissa vinklar kan man komma åt de exakta värdena på de trigonometriska funktionerna. Speciellt om man utgår ifrån en kvadrat eller en liksidig triangel är detta enkelt.

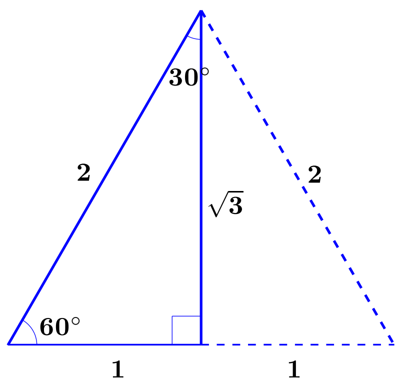
45° $-$ **45°** $-$ **90°**: Vi delar en kvadrat med sidan 1 längdenhet längs diagonalen. Diagonalens längd blir då $\sqrt{2}$ längdenheter (använd Pythagoras sats!).



Nu kan vi använda våra definitioner av trigonometriska funktioner:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 45^\circ = 1, \qquad \cot 45^\circ = 1$$

30° $-$ **60°** $-$ **90°**: Vi upprepar bravaden med en liksidig triangel som vi klyver symmetriskt. Vi låter sidorna vara 2 längdenheter, så att den delade halva sidan blir 1 längdenhet. Med Pythagoras sats kan vi då beräkna delningslinjen (höjden) till $\sqrt{3}$.



Nu får vi de exakta värdena på de trigonometriska funktionerna för både 60° och 30° (vi hoppar över cotangens denna gång):

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

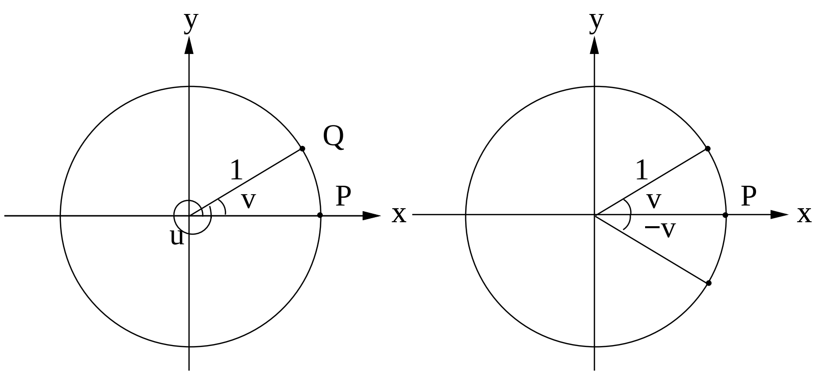
Vi kan ställa samman våra resultat i en liten tabell, där vi också tar med 0° och 90°.

v	0	30°	45°	60°	90°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

3.3 Trigonometriska funktionerna för allmänna vinklar

I trianglar kan ju vinklarna bli mellan 0° och 180°, i fyrhörningar och andra geometriska figurer kan man ha vinklar melllan 0° och 360°. Det senare gäller ju också vid angivning av kurs för ett fartyg eller flygplan. I andra sammanhang, t ex när man arbetar med roterande apparater (generatorer, motorer etc) eller med andra periodiska processer, låter man vinkeln löpa vidare flera varv. Om rotationsriktningen vänds, räknar man också med negativa vinklar. Med andra ord, vinklar kan få ha vilka reella värden som helst. Därmed finns det också anledning att utvidga våra definitioner av de trigonometriska funktionerna.

För att kunna definiera de trigonometriska funktionerna mera allmänt, inför vi den s k *enhetscirkeln* i ett koordinatsystem. Dess medelpunkt är origo $O = (0,0)$, dess radie är 1. Punkten $P = (1,0)$ är cirkelns skärningspunkt med positiva x-axeln. Vi tänker oss nu att sträckan OP likt en visare på en klocka vrids *moturs* runt origo så att den hamnar i Q. Vinkeln mellan strålens utgångsläge OP och dess slutläge OQ kallar vi v. Observera att om man vrider $v + 360°$ så hamnar punkten P också i Q eftersom 360° motsvarar vridning ett varv moturs.



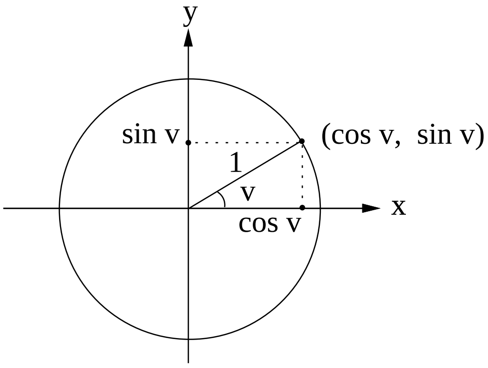
(a) Vinkeln u är $v + 360°$.

(b) En vinkel och dess negativa motsvarighet.

Figur 1: Allmänna vinklar.

Om visaren i stället vrids *medurs* räknas vinkeln *negativ*.

Det finns en stor fördel med detta synsätt. Vi kan tänka oss att visaren vrids mer än ett varv och låta vinkeln vara längden av den genomlöpta cirkelbågen. Vinklar kan då vara större än 2π. Dessa har inte längre någon geometrisk motsvarighet. Den punkt som motsvarar vinkeln 450° är $(0,1)$ eftersom $450^\circ = 90^\circ + 360^\circ$. Visaren vrids ett och ett kvarts varv. Vinklarna 450° och 90° motsvaras av *samma punkt* men är *olika vinklar*. Om visaren vrids *medurs* är vinkeln negativ. Vinkeln -270° motsvaras också av $(0,1)$.



Figur 2: Enhetscirkeln.

En första observation vi kan göra är att om

$$0 < v < 90^\circ$$

så är $Q = (\cos v, \sin v)$, eftersom vi har en rätvinklig triangel med en hypotenusa av längd 1. Denna observation ligger till grund för den allmänna definitionen av de trigonometriska funktionernas värden för godtyckliga vinklar.

Definition: Låt $Q = (x,y)$ motsvara vinkeln v enligt ovan. Då är

$$\cos v = x, \quad \sin v = y, \quad \tan v = \frac{y}{x} \text{ om } x \neq 0, \quad \cot v = \frac{x}{y} \text{ om } y \neq 0.$$

För vinklar v sådana att $x = 0$ är $\tan v$ odefinierat. För vinklar v sådana att $y = 0$ är $\cot v$ odefinierat.

Eftersom en ökning eller minskning av v med 360° motsvarar en vridning av ”visaren” *OP* ett helt varv mot- eller medurs följer det att sinus och cosinus är *periodiska*. Närmare bestämt så har vi följande:

$$\begin{aligned} \sin v &= \sin(v+360^\circ) = \sin(v+n\cdot 360^\circ), \text{ för alla } n \in \mathbb{Z} \\ \cos v &= \cos(v+360^\circ) = \cos(v+n\cdot 360^\circ), \text{ för alla } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Trubbiga vinklar

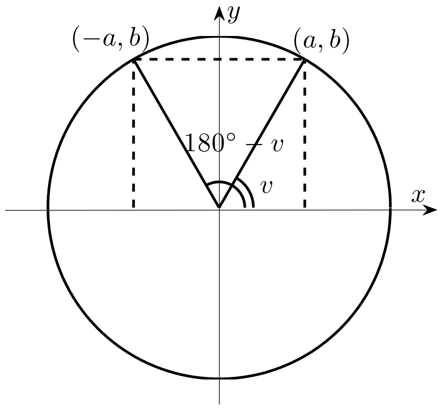
I en triangel är vinklarna alltid mellan 0° och 180°. Därför ska vi koncentrera oss på att utforska sinus, cosinus och tangens för trubbiga vinklar, dvs mellan 90° och 180°, eftersom vi vill kunna använda trigonometrin på allmänna trianglar (förut har vi ju bara kunnat använda den på rätvinkliga trianglar). Vi har tidigare kommit åt de spetsiga vinklarna, så nu ska vi jämföra dessa med de trubbiga genom en *spegling* i y-axeln. Två vinklar med summan 180°, alltså v och $180^\circ - v$ kallas *supplementvinklar*. De svarar mot varandra genom spegling i y-axeln.

Spegelpunkten till (a,b) med avseende på y-axeln är $(-a,b)$ med vinkeln $(180^\circ - v)$. Alltså är

$$\cos(180^\circ - v) = -a = -\cos v$$

$$\sin(180^\circ - v) = b = \sin v$$

$$\tan(180^\circ - v) = \frac{b}{-a} = -\tan v,$$



Figur 3: Spegling i y-axeln.

Vi kan nu bygga ut vår gamla tabell med exakta värden:

v	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Exempel 9:

(a) Lös ekvationen $\sin x = 0,88$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

(b) Lös ekvationen $\cos x = 0,88$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

(c) Lös ekvationen $\cos x = -0,88$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

Lösning

(a) Ekvationen har två olika lösningar i intervallet, miniräknaren ger oss den spetsiga lösningen $x_1 \approx 61,6^\circ$, den andra (trubbiga) lösningen är supplementvinkeln $x_2 = 180^\circ - x_1 \approx 118,4^\circ$.

(b) Cosinusekvationen har bara en lösning i vårt intervall, vi får den av miniräknaren: $x \approx 28,4^\circ$

(c) Samma gäller här, men med ett negativt värde är vinkeln trubbig. Miniräknaren ger $x \approx 151,6^\circ$ (som är supplementvinkeln till lösningen i (b)).

Detta exempel visar att cosinus är att föredra framför sinus vid vinkelberäkningar, om man kan välja. I trianglar finns det högst en trubbig vinkel, så om man beräknar en vinkel som inte är triangelns största, kan man vara säker på att den är spetsig. Då är sinusekvationen ”ofarlig”.

3.4 Allmänna trianglar, areasatsen, sinus- och cosinussatserna.

En triangel har antingen tre spetsiga vinklar, den kallas då spetsvinklig, eller en trubbig och två spetsiga då den kallas trubbvinklig, eller en rät vinkel och två spetsiga då den som bekant kallas rätvinklig.

Ganska ofta beror kalkyler eller resonemang på om triangeln är spets-, rät-, eller trubbvinklig. Det är därför viktigt att övertyga sig om att påståenden etc är allmängiltiga och inte bara gäller t ex spetsvinkliga trianglar.

Följande satser kommer att användas i detta avsnitt. Deras bevis ges i Appendix.

Areasatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar A, B och C så gäller för *triangelns area* T att

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Med andra ord så är arean halva produkten av två sidors längder och sinus för deras mellanliggande vinkel.

Sinussatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar A, B och C så gäller att

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Cosinussatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar A, B och C så gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Anmärkning 1: Sinussatsens ekvationer kan lika gärna skrivas $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, vilket kan vara behändigt om det är en sida man vill lösa ut.

Anmärkning 2: I specialfallet $C = 90^\circ$ fås $c^2 = a^2 + b^2$, d v s Pythagoras sats.

Exempel 10: En triangel har sidorna $a = 27$, $b = 39$ (längdenheter) och vinkeln $C = 95°$. Beräkna sidan c och triangelns area.

Lösning: Cosinussatsen ger $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos C = 27^2 + 39^2 - 2 \cdot 27 \cdot 39\cos 95°$. Kvadratroten ur detta ger $c \approx 49,3$

Areasatsen ger triangelarean $T = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \dfrac{27 \cdot 39 \cdot \sin 95°}{2} \approx 524,5$ areaenheter.

Exempel 11: En triangel har sidorna $a = 15$, $b = 19$ och $c = 7$. Beräkna triangelns största vinkel.

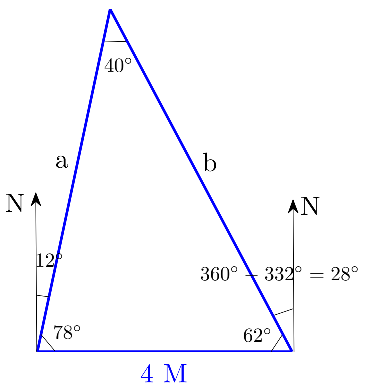
Lösning: Den största vinkeln är B eftersom den står mot den största sidan. Cosinussatsen ger

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad \Rightarrow \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{87}{210}$$

Med miniräknarens hjälp får vi $B \approx 114,5°$.

Exempel 12: Ett fartyg rör sig med 8 knop rakt österut, opåverkat av strömmar. Vid två tillfällen med 30 minuters mellanrum mäter man riktningen till en och samma fyr. Bäringen blir då 12° respektive 332°. Beräkna avståndet från fartyget till fyren vid de båda tidpunkterna.

Lösning: Efter 30 minuters gång med farten 8 knop har man tillryggalagt 4 nautiska mil i väst-östlig riktning. Från denna baslinje har man två sträckor a och b att beräkna i en triangel med vinklarna 78°, 62° och 40° (se figuren, där också sambanden mellan de i uppgiften angivna riktningarna och triangelns vinklar antyds).



Både a och b kan beräknas med hjälp av sinussatsen:
$$\frac{a}{\sin 62°} = \frac{b}{\sin 78°} = \frac{4}{\sin 40°} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4\sin 62°}{\sin 40°} \approx 5.49, \quad b = \frac{4\sin 78°}{\sin 40°} \approx 6.09$$

Svar: avståndet var **5.5 M** respektive **6.1 M**.

Exempel 13: Solvera en triangel, d v s beräkna alla sidor och vinklar, om det är känt att $a = 7,0$, $b = 5,5$ och $B = 40°$.

Lösning 1: Sinussatsen ger

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \Rightarrow \quad \sin A = \frac{a}{b} \cdot \sin B = \frac{7,0}{5,5} \cdot \sin 40° \approx \frac{7,0}{5,5} \cdot 0,643 \approx 0,818$$

Ekvationen $\sin A \approx 0,818$ har lösningarna

$$A_1 \approx 54,9° \text{ (spetsig vinkel) och } A_2 = 180° - A_1 \approx 125,1° \text{ (trubbig vinkel),}$$

ty $\sin A_2 = \sin(180° - A_1) = \sin A_1$.

Fall 1: $A_1 \approx 54,9°$ ger vinkeln $C_1 = 180° - B - A_1 \approx 85,1°$. Med sinussatsen fås sidan

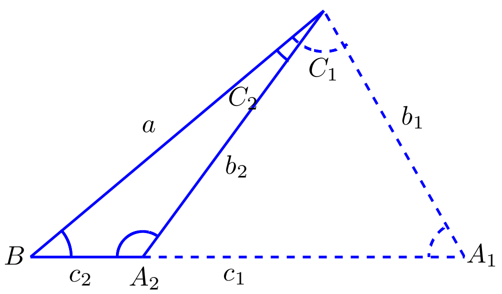
$$\frac{c_1}{\sin C_1} = \frac{b}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad c_1 = b \cdot \frac{\sin C_1}{\sin B} \approx 5,5 \cdot \frac{\sin 85,1°}{\sin 40°} \approx 5,5 \cdot \frac{0,996}{0,643} \approx 8,5.$$

Fall 2: $A_2 \approx 125,1°$ ger vinkeln $C_2 = 180° - B - A_2 \approx 14,9°$, och sidan

$$\frac{c_2}{\sin C_2} = \frac{b}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad c_2 = b \cdot \sin C_2 / \sin B \approx 5,5 \cdot \sin 14,9° / \sin 40°$$

$$\approx 5,5 \cdot 0,257/0,643 \approx 2,2.$$

Figuren illustrerar de två fallen (fall 1 streckat där det skiljer sig)



Lösning 2: Man kan också lösa detta problem med cosinussatsen. Man löser då ut sidan c, som denna gång inte är den som står mot den kända vinkeln (som i exempel 10), och man får en andragradsekvation som ger oss de två fallen:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad \Longleftrightarrow \quad c^2 - 2ac\cos B + a^2 - b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$c^2 - (14\cos 40^\circ)c + 18,75 = 0$$

pq-formeln ger oss

$$c = 7\cos 40^\circ \pm \sqrt{(7\cos 40^\circ)^2 - 18,75} \approx 5,36 \pm 3,16$$

Vi får de två fallen $c_1 \approx 8,5$ och $c_2 \approx 2,2$. Med sinussatsen bestämmer man sedan den mindre av de återstående vinklarna, så man vet att man ska välja det spetsiga lösningsalternativet som sinusekvationen ger. Vilken som är den mindre avgörs ju av storleksordningen mellan de motstående sidorna, som nu är kända. Den sista vinkeln bestäms som förut med vinkelsumman. Detaljerna utelämnas här.

Svar:

Fall 1: $A_1 \approx 54,9^\circ, \quad C_1 \approx 85,1^\circ, \quad c_1 \approx 8,5$

Fall 2: $A_2 \approx 125,1^\circ, \quad C_2 \approx 14,9^\circ, \quad c_2 \approx 2,2.$

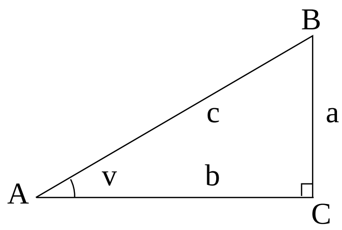
Övningar

1. En 170 cm lång person står bredvid ett träd. Personens skugga är 260 cm lång, trädets är 28 m. Hur högt är trädet?

2. En triangel T_1 har sidorna 12 cm, 21 cm och 27 cm. En mindre triangel T_2 bildas genom att man kapar T_1 parallellt med den kortaste sidan. Den sträcka som delar T_1 har längden 8 cm. Vilka blir de övriga sidlängderna i T_2?

3. I en rätvinklig triangel är kateterna 19 och 33 längdenheter. Hur lång är hypotenusan?

4. I en triangel är längsta sidan 21853, en annan sida är 8405. Hur lång är den tredje sidan om triangeln är rätvinklig?

5. 

Solvera (bestäm alla sidor och vinklar i) följande rätvinkliga trianglar med beteckningar enligt figuren bredvid:

   (a) $c = 4,0$ och $A = 35^\circ$
   (b) $a = 3,0$ och $A = 36^\circ$
   (c) $a = 2,0$ och $c = 3,0$
   (d) $a = 2,0$ och $b = 3,0$
   (e) $b = 5,0$ och $B = 55^\circ$.

6. Bestäm för v i intervallet $0^\circ < v < 90^\circ$)

   (a) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 3/5$
   [Ledning: Rita en triangel med $a = 3$ och $c = 5$]

   (b) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 2/3$ (c) $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 1/3$

   (d) $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 0,4$ (e) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 1/2$

   (f) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 24/7$ (g) $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = 0,7$

7. Bestäm alla lösningar mellan $0°$ och $180°$ till följande ekvationer:

   (a) $\sin v = 0,733$

   (b) $\sin v = -0,733$

   (c) $\cos v = 0,733$

   (d) $\cos v = -0,733$

8. I en triangel är en sida 12 cm och dess motstående vinkel är $80°$, en annan sida är 10 cm. Beräkna triangelns övriga sidor och vinklar samt dess area.

9. Vilka är vinklarna i en triangel med sidorna 13, 19 och 25?

10. I en triangel är längsta sidan 12 cm och två av vinklarna är $30°$ respektive $40°$. Beräkna triangelns övriga sidor och dess area.

11. I en triangel är vinkeln $A = 34°$, sidan $b = 10$ och sidan $a = 7$. Beräkna återstående sidor och vinklar.

12. I en triangel är vinkeln $A = 34°$, sidan $b = 10$ och sidan $a = 11$. Beräkna återstående sidor och vinklar.

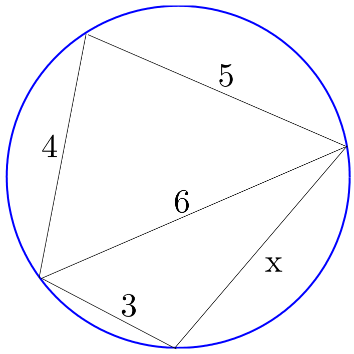
13. Två personer står på var sitt fartygsdäck, den ena med ögonhöjd 20 m över havet, den andra 15 m. Beräkna det största avstånd på vilket de skulle kunna se varandra (åtminstone vid god sikt och med bra kikare). Vi bortser från atmosfärisk ljusbrytning och vi betraktar jorden som klotformad med radien 6371 km.

14. En lodrät mast har monterats på en 50m hög byggnad. Då man står 100m från byggnadens fot (vågrät mark) kan man mäta den vinkel som masten upptar till $12°$. Beräkna mastens höjd.

15. En annan lodrät mast står på plan, horisontell mark. Masten är stagad med stålwirar, som kan betraktas som rätlinjiga (hårt spända) och är fastspända i mastens topp och i marken. En av wirarna bildar vinkeln 35° med marken, för en annan är vinkeln 50°. Den sistnämnda wiren fäster i marken 10 meter närmare mastens fotpunkt än den förstnämnda. Beräkna mastens höjd.

16. Ibland kan man se planeten Venus och solen samtidigt (åtminstone går detta med ett bra teleskop). Vid ett sådant tillfälle bestämdes vinkeln mellan de båda himlakropparnas två riktningar till 12°. Om vi betraktar jordens och Venus banor kring solen som cirklar i samma plan med solen i centrum och med radier 150 miljoner km respektive 108 miljoner km, hur långt var det då från jorden till Venus vid detta tillfälle?

17. Beräkna sidan markerad med x i figuren. Fyrhörningens alla hörn ligger på sam-



ma cirkel, enheten är cm.

Ledning: om en fyrhörning är inskriven i en cirkel, finns ett speciellt samband mellan vinklarna för två motstående hörn. Detta samband kan härledas ur satsen om medelpunktsvinkel och bågvinkel (=periferivinkel).

Facit till övningar

1. 18,3 m

2. 14 cm och 18 cm

3. $\sqrt{1450} \approx 38,1$ l.e.

4. 20172

5. (a) $B = 55^\circ$, $a \approx 2,3$, $b \approx 3,3$
   (b) $B = 54^\circ$, $b \approx 4,1$, $c \approx 5,1$
   (c) $b \approx 2,2$, $A \approx 41,8^\circ$, $B \approx 48,2^\circ$
   (d) $c \approx 3,6$, $A \approx 33,7^\circ$, $B \approx 56,3^\circ$
   (e) $A = 35^\circ$, $a \approx 3,5$, $c \approx 6,1$

6. (a) $\cos v = 4/5$, $\tan v = 3/4$
   (b) $\cos v = \sqrt{5}/3$, $\tan v = 2/\sqrt{5}$
   (c) $\sin v = 2\sqrt{2}/3$, $\tan v = 2\sqrt{2}$
   (d) $\sin v = \sqrt{21}/5$, $\tan v = \sqrt{21}/2$
   (e) $\sin v = 1/\sqrt{5}$, $\cos v = 2/\sqrt{5}$
   (f) $\sin v = 24/25$, $\cos v = 7/25$
   (g) $\sin v = 10/\sqrt{149}$, $\cos v = 7/\sqrt{149}$

7. (a) 47,1° och 132,9°
   (b) Ingen vinkel mellan 0° och 180° har negativt sinusvärde.
   (c) 42,9°
   (d) 137,1°

8. Sida 8,6 cm, vinklar 55° och 45°, area 42 cm^2 (approximativt).

9. 30,7°, 48,2°, 101,1° (approximativt).

10. Sidor 6,4 cm och 8,2 cm. Area 24,6 cm^2 (approximativt).

11. Fall 1: $B_1 \approx 53,0^\circ$, $C_1 \approx 93,0^\circ$, $c_1 \approx 12,5$
    Fall 2: $B_2 \approx 127,0^\circ$, $C_2 \approx 19,0^\circ$, $c_2 \approx 4,1$.

12. $B \approx 30,6^\circ$, $C \approx 115,4^\circ$, $c \approx 17,8$ (bara ett fall denna gång).

13. $\approx$29,8 km (=13,8 km + 16,0 km, addera bådas horisontavstånd!)

14. $\approx$29,7 m

15. $\approx$17 m

16. 250 miljoner km eller 43 miljoner km (två möjliga fall - rita!)

17. $\approx$4,8 cm