

Tentamen i Inledande matematik för I1, E1, A1 och V1 2007-10-26
Svar eller Lösningar

1 a) $\frac{2}{3}$ b) $x \leq 0, 1 \leq x < 3$ c) $\frac{2}{3}$ d) Systemet saknar lösning

e) i. $\frac{2}{3}$ ii. e^6 iii. 1 f) $(x, y) = (1, -1)$, lokalt maximum.

2. a) Bilda två vektorer i planet, till exempel $v_1 = (1, 2, 3) - (-1, 3, 4) = (2, -1, -1)$ och $v_2 = (3, 5, -1) - (-1, 3, 4) = (4, 2, -5)$. En normalvektor till planet ges då av $v_1 \times v_2 = (7, 6, 8)$ och med hjälp av till exempel punkten $(1, 2, 3)$ får man planets ekvation till $7x + 6y + 8z = 43$

- b) En riktningsvektor till linjen är $r_1 = (1, -1, 0) - (-3, -2, -1) = (4, 1, 1)$ och en ekvation

$$\text{för linjen blir därför } \begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

Skärningen mellan linjen och planet får man genom att sätta in linjens komponenter i planets ekvation: $7(4t+1) + 6(t-1) + 8t = 43 \Leftrightarrow t=1$ varför skärningspunkten är $(5, 0, 1)$

3. Vi bestämmer först definitionsmängden till $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2) - x$; vi måste ha $x^3 - 2x^2 > 0$ vilket leder till att $x > 2$.

Vidare har vi att $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} - 1 = \frac{5x-4-x^2}{x(x-2)} = \frac{(x-1)(x-4)}{x(2-x)}$ samt att

$f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \downarrow 2$ respektive då $x \rightarrow \infty$.

Teckentabell:

x	2	4
f'	+	0 -
f	$-\infty$	$\uparrow \ln 32 - 4 \downarrow$

Vi ser att värdemängden är $= \{y \in \mathbb{R}; y < \ln 32 - 4\}$

4. Vi skall rita grafen till $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Definitionsmängden är alla x sådana att $x \neq \pm 1$

Låt $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ så blir $y' = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$ som är $= 0$ när $x = 0$ samt när $x = \pm\sqrt{3}$

Gränsvärden: $x \uparrow -1 \Rightarrow y \rightarrow -\infty$, $x \downarrow -1 \Rightarrow y \rightarrow \infty$, $x \uparrow 1 \Rightarrow y \rightarrow -\infty$,
 $x \downarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty$

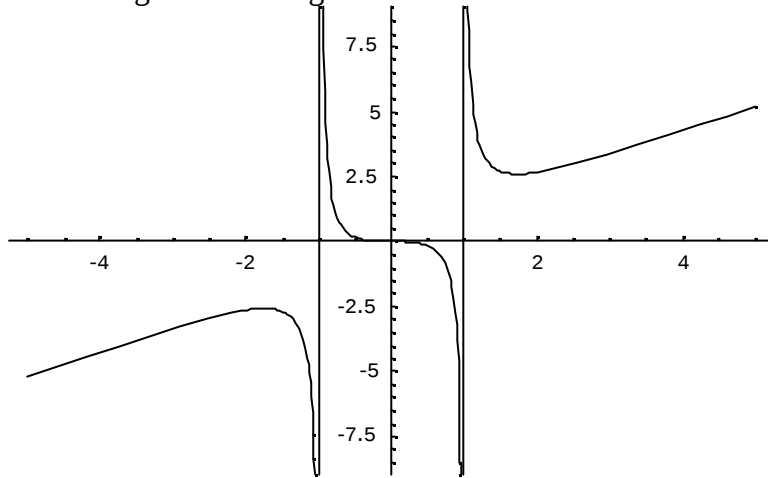
Vidare är $f(0)=0$, $f(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vi har lodräta asymptoter i $x=1$ respektive $x=-1$

Och eftersom $\frac{y}{x} \rightarrow 1$ när $x \rightarrow \infty$, och $y-x = \frac{x^3 - x(x^2-1)}{x^2-1} \rightarrow 0$ när $x \rightarrow \infty$, blir $y=x$ en sned asymptot (samma gränsvärden gäller då $x \rightarrow -\infty$).

	x	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	
Teckentabell:	y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
	y	$\uparrow -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow -\infty/\infty$	$\downarrow 0$	$\downarrow -\infty/\infty$	$\downarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow$

Och slutligen funktionsgraf:



5. Välj punkten $(1,1,4)$ på linjen. Vi kan då teckna avståndet som $d = \frac{|r \times v|}{|v|}$ där

$r = (1,0,-1)$ och $v = (a,-1,1)$. Här blir $r \times v = -(1,1+a,1)$ och $d^2 = \frac{a^2 + 2a + 3}{a^2 + 2}$.

Sätt $f(a) = \frac{a^2 + 2a + 3}{a^2 + 2}$; uppgiften blir att hitta minsta värde till denna funktion.

$f(a)$ är definierad för alla a och $\rightarrow 1$ när $a \rightarrow \pm\infty$

$f'(a) = \frac{(2a+2)(a^2+2) - 2a(a^2+2a+3)}{(a^2+2)^2}$ som är $= 0$ när $a = 1$ samt när $a = -2$.

Vi har $f(1) = \frac{6}{3} = 2$ och $f(-2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Funktionen har uppenbarligen ett minimum i $a = -2$ (avståndet mellan den givna punkten och just den linjen blir $= \frac{1}{\sqrt{2}}$)

6. a) S b) F c) F d) F e) S f) S

7. För a) och b), se boken. För c) ta till exempel $f(x) = x^3$