

Inledande matematik för I1
mve010
lp 1 ht 2008

Svar till några av Extra övningarna om kurvkonstruktion och besläktade uppgifter

1.

2. Hur många reella rötter har ekvationen $x^3 - Ax + 1 = 0$ för olika värden på konstanten A ?

$$\text{Svar: } \begin{cases} A > \sqrt[3]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} & 3 \text{ rötter} \\ A = \sqrt[3]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} & 2 \text{ rötter} \\ A < \sqrt[3]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} & 1 \text{ rot} \end{cases}$$

3.

4. Beräkna maximala arean av en rektangel som har två hörn på kurvan $y = e^{-x^2}$ och två hörn på x -axeln.

$$\text{Svar: } \sqrt{\frac{2}{e}}$$

5.

6. Visa att $\ln(1+x) > \frac{2x}{2+x}$ för alla positiva x .

$$\text{Svar: sätt } f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}. \text{ Olikheten följer av att } f(0) = 0$$

$$\text{samtidigt att } f'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} > 0 \text{ om } x > 0$$

7.

8. Bestäm antalet rötter till ekvationen $\frac{1}{x} + 2\ln(x+1) = A$ för varje värde på konstanten A .

$$\text{Svar: } \begin{cases} A > 1 + \ln 4 & 2 \text{ rötter} \\ A = 1 + \ln 4 & 1 \text{ rot} \\ -2 - \ln 4 < A < 1 + \ln 4 & \text{inga rötter} \\ A = -2 - \ln 4 & 1 \text{ rot} \\ A < -2 - \ln 4 & 2 \text{ rötter} \end{cases}$$

9.

10.

11. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$, $-2 \leq x \leq 0$

Svar: största värde är 0, minsta värde är -1

12. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 8}$, $-3 \leq x \leq 0$

Svar: största värde är $\sqrt{8}$, minsta värde är 2

13. Belysningen på ett objekt från en ljuskälla är direkt proportionell mot källans styrka och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan källan och objektet. Om två ljuskällor, den ena tre gånger så stark som den andra, ställs med 10 meters mellanrum, var på en linje mellan källorna skall ett objekt placeras så att det blir så lite belyst som möjligt?

Svar: $\frac{10\sqrt[3]{3}}{1 + \sqrt[3]{3}}$ meter från den starkare källan.

14. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - 2|}$

Svar: största värde är 4/3, minsta värde saknas

15.

16. Visa att $f(x) = \ln x + \arctan x$ är inverterbar och kalla inversen g .

Bestäm $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Vad blir inversens värdemängd?

Svar: $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{3}$ Inversens värdemängd består av alla positiva tal.

17. För vilka värden på konstanten a är $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e$?

Svar: $a = 1/2$