

Svar eller lösningar

1. Till denna uppgift skall **endast svar lämnas in**, alltså utan motiveringar.

a) Skriv $(2i - 2)^6$ på formen $a + ib$ (2p)

b) Bestäm $(f^{-1})'(12)$ om $f(x) = x^5 + 3x^3 + 8$ (2p)

c) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$ (2p)

d) Bestäm alla värden på t , $0 \leq t \leq 2\pi$ sådana att $\sin 2t = \sin t$ (2p)

e) Beräkna följande gränsvärden:

i. $\lim_{x \downarrow 0} \sin x \ln x$ ii. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + x^9}{9^x + x^4}$ iii. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x}{3x + 1}$ (3p)

f) Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + \ln x & \text{om } 0 < x \leq 2 \\ 3 - e^{\frac{x}{4}} & \text{om } 2 < x < 4 \end{cases}$$
 (3p)

Svar: a) $512i$ b) $\frac{1}{14}$ c) $(x, y, z) = (7, 2, -9)$

d) $t = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ e) i. 0 ii. 0 iii. $\frac{e^2}{3}$ f) $(-\infty, -7] \cup (3 - e, 3 - \sqrt{e})$

Till uppgifterna 2 – 5 skall fullständiga lösningar lämnas in. 6 poäng per uppgift

2. a) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ och $(0, 0, 6)$.

b) Bestäm skärningen mellan planet i a) och linjen $\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 2 \\ z = t - 2 \end{cases}$

c) Bestäm vinkeln mellan planet och linjen.

Lösning: Två vektorer i planet är $(1, -2, 0)$ och $(-1, 0, 6)$. En normalvektor är deras kryssprodukt: $(1, -2, 0) \times (-1, 0, 6) = (-12, -6, -2)$. Planets ekvation blir då $6x + 3y + z = 6$, vilket man också kan se direkt från de tre givna punkterna.

Skärningen får man genom att sätta in linjens komponenter i planets ekvation:
 $6t + 6 - 6t + t - 2 = 6 \Rightarrow t = 2$ Skärningspunkten blir följaktligen $(2, -2, 0)$

För vinkeln mellan linjen och planets normalvektor gäller $\cos \theta = \frac{(6, 3, 1) \cdot (1, -2, 1)}{\|(6, 3, 1)\| \|(1, -2, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{276}}$,

varför vinkeln mellan planet och linjen blir $= \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{276}}$

3. Konstruera kurvan $y = \frac{x}{3x+4} e^{-x}$.
 Ange lokala extrempunkter och asymptoter.
 Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.

Lösning: definitionsmängden är $x \neq -\frac{4}{3}$. Derivatan $y' = \frac{(x+2)(2-3x)e^{-x}}{(3x+4)^2}$

Intressanta punkter blir $x = -2$, $x = -\frac{4}{3}$, $x = \frac{2}{3}$

Gränsvärden: $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0$, $x \uparrow -\frac{4}{3} \Rightarrow y \rightarrow \infty$, $x \downarrow -\frac{4}{3} \Rightarrow y \rightarrow -\infty$

Asymptoter: $x = -\frac{4}{3}$, $y = 0$ (man ser lätt att det inte finns någon sned)

Teckenschema:

x		-2		$-\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y	$\downarrow$	e^2	$\uparrow$	$\infty / -\infty$	$\uparrow$	$\frac{1}{15e^{\frac{2}{3}}}$	$\downarrow$

4. Två kuber, inte nödvändigtvis lika stora, rymmer sammanlagt 2 liter.
 Hur stor respektive hur liten kan kubernas sammanlagda begränsningsarea vara?

Lösning: kalla kubernas kanter för x och y . Då är $x^3 + y^3 = 2$. Vi söker max och min av

$x^2 + y^2 = x^2 + (2 - x^3)^{\frac{2}{3}}$, $0 \leq x \leq 2^{\frac{1}{3}}$ där vi för enkelhets skull tillåter att den ena kuben

krymper samman till en punkt. Med $f(x) = x^2 + (2 - x^3)^{\frac{2}{3}}$ är det klart att vi skall undersöka ändpunkter samt punkter där derivatan $= 0$.

$$f(0) = f\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = 2^{\frac{2}{3}}, \quad f'(x) = 2x - \frac{2}{3}(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}3x^2 = 2x\left(1 - x(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}\right)$$

Parentesen blir $=0$ när $\frac{x^3}{2-x^3} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ och det gäller att $f(1) = 2$

Svar: största värde är 12, minsta värde saknas om vi kräver att bägge kuber skall ha positiv volym.

5. Bestäm alla värden på konstanten a som gör att $f(x) = x^3 + ax + 12 \arctan x$ blir inverterbar.

Lösning: funktionen är definierad och deriverbar för alla x , så vi kan avgöra frågan genom att undersöka derivatan. $f'(x) = 3x^2 + a + \frac{12}{1+x^2}$. $f(x)$ blir inverterbar om $f'(x) \geq 0$ för alla

x . Sätt nu $h(x) = 3x^2 + \frac{12}{1+x^2}$.

Vi söker minsta värdet till $h(x)$. Eftersom $h(x) \rightarrow \infty$ om $x \rightarrow \pm\infty$ kommer detta minsta värde att inträffa i en punkt där $h'(x) = 0$.

$$h'(x) = 6x - \frac{24x}{(1+x^2)^2} = 6x \left(1 - \frac{4}{(1+x^2)^2}\right) = 0 \quad \text{om} \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \pm 1.$$

$$h(0) = 12 \quad \text{och} \quad h(\pm 1) = 9.$$

Alltså är $f(x)$ inverterbar för alla $a \geq -9$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Någon motivering krävs ej. Rätt svar ger 1 poäng, inget svar 0 poäng och fel svar -1 poäng. Dock är 0 minsta poäng totalt.

- a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är avtagande funktioner är $f(g(x))$ växande.
- b) Ekvationen $\ln x = e^{-x}$ har exakt en lösning.
- c) Om $\vec{n} = (1, -1, 2)$ är en normalvektor till ett visst plan, måste $-\vec{n} = (-1, 1, -2)$ vara en normalvektor till samma plan.
- d) Om punkten $p_0 = (1, -1, 2)$ ligger i ett visst plan, måste punkten $-p_0 = (-1, 1, -2)$ ligga i samma plan.
- e) Om $f(x)$ antar sitt största värde i $x = 5$ antar $g(x) = e^{2f(x)}$ sitt största värde i $x = \ln \frac{5}{2}$.

f) $\arcsin(2t) = 2 \arcsin t \cdot \arccos t$ om $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

Svar: **S, S, S, F, F, F.**

7. a) Formulera medelvärdessatsen (2p)

b) Låt $f(x)$ vara deriverbar i intervallet $0 \leq x \leq 2$.

Man vet att $f(0) = f(2) = 0$ och att det finns ett tal

c , $0 < c < 2$ med $f(c) = 1$.

Visa att det finns ett tal s , $0 \leq s \leq 2$, sådant att $|f'(s)| \geq 1$ (4p)

Lösning: Antag först att $c < 1$. Enligt medelvärdessatsen finns då ett tal s mellan 0 och c sådant att $f'(s) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{1}{c} > 1$. Om i stället $c \geq 1$ finns återigen enligt

medelvärdessatsen ett tal s , nu mellan c och 2 sådant att $f'(s) = \frac{f(2) - f(c)}{2 - c} = \frac{-1}{2 - c} \leq -1$