

Lösningar eller svar

1. Till denna uppgift skall **endast svar lämnas in**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm alla x sådana att $\sin 2x + \frac{1}{2} = 0$ (2p)

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + n\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + n\pi \end{cases}$$

b) Ange samtliga lösningar till ekvationen $z^4 + \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 0$

$$\text{Svar: } z = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{n\pi}{2}\right)} \quad n = 0, 1, 2, 3$$

c) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 5 \\ x + 4y - z = 10 \\ 3x + 3y - 5z = -2 \end{cases}$$
 (2p)

$$\text{Svar: } (x, y, z) = \frac{1}{5}(147, -2, 89) \quad (\text{ursäkta!})$$

d) Bestäm största och minsta värde till $f(x) = 1 - |x^2 + x - 2|$
om $-2 \leq x \leq 3$ (2p)

Lösning: funktionen är kontinuerlig och intervallet kompakt så största och minsta värde existerar och antas i en ändpunkt, där derivatan är $=0$, eller där funktionen inte är deriverbar. Man jämför därför funktionsvärden för $x = -2, 3, -\frac{1}{2}, 1$ och får att största värde är $f(-2) = 1$ och minsta $f(3) = -9$

e) Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right) \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$\text{Svar: } -\infty, \quad 1, \quad \frac{2}{3}$$

f) För vilket värde på konstanten k har kurvan $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$
exakt en horisontell tangent? (3p)

Lösning: kravet på k är att derivatan skall ha exakt ett nollställe.

$$\text{Eftersom } y' = 3x^2 + 2kx + 3 = 3 \left(\left(x + \frac{k}{3} \right)^2 + 1 - \frac{k^2}{9} \right) \text{ blir svaret } k = \pm 3$$

Till uppgifterna 2 – 5 skall fullständiga lösningar lämnas in.

2.

(6p)

- a) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(-3,1,-3), (2,-1,-1)$ samt $(1,0,1)$.
 b) Bestäm en ekvation för linjen genom punkterna $(2,-1,1)$ och $(4,3,0)$
 c) Bestäm linjen och planets skärningspunkt. Bestäm också skärningsvinkeln.

Lösning: man bildar två riktningsvektorer i planet, $v = (5,-2,2)$ $u = (-1,1,2)$ och därefter normalvektor $n = u \times v = (6,12,-3)$. Planets ekvation blir därför

$$6x + 12y - 3z = 3 \Leftrightarrow 2x + 4y - z = 1.$$

En riktningsvektor till linjen är $\ell = (2,4,-1)$ och linjens ekvation
$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = -t \end{cases}.$$

Skärningen mellan linjen och planet erhålls genom att sätta in linjens koordinater i planets ekvation och därefter lösa t : $12t + 24 + 48t + 36 + 3t = 3 \Leftrightarrow t = -\frac{19}{21}$.

Skärningspunkten blir $(x,y,z) = \frac{1}{21}(46,-13,19)$.

Skärningsvinkeln slutligen blir $\frac{\pi}{2}$ eftersom linjens riktningsvektor är parallell med planets normal.

3. Konstruera kurvan $y = \frac{x^2}{x+3}$.

Ange lokala extrempunkter och asymptoter.
 Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.

(6p)

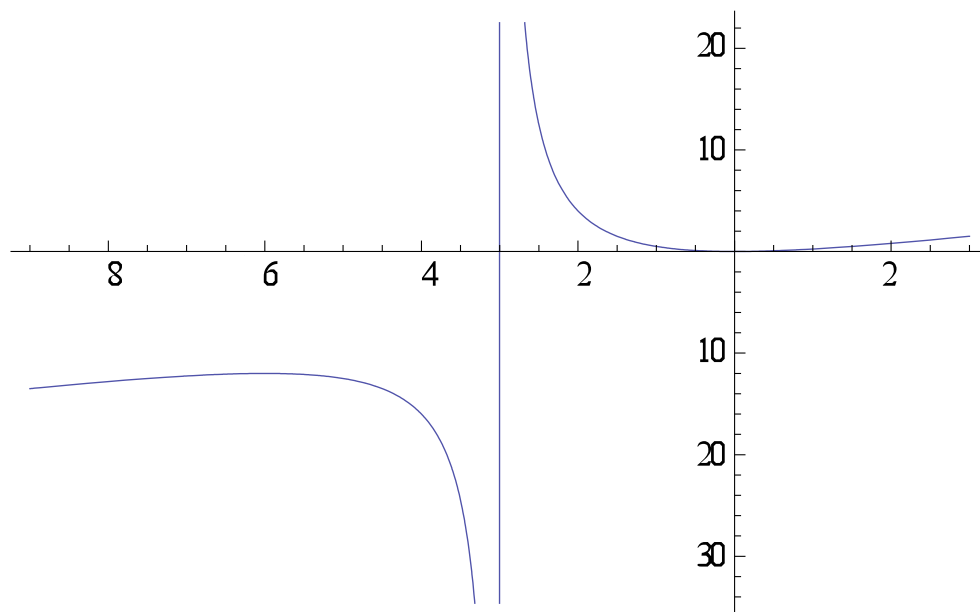
Lösning: Definitionsmängden utgörs av alla $x \neq -3$.

Vidare är $y' = \frac{x(x+6)}{(x+3)^2}$

Kurvan har en lodrät asymptot $x = -3$ och, eftersom $\frac{y}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow \pm \infty$ och $y - x \rightarrow -3$ då $x \rightarrow \pm \infty$, en sned asymptot $y = x - 3$.

Teckenschema:

x	-6	-3	0			
y'	$+$	0	$-$		$-$	0
y	$\uparrow$	-12	$\downarrow$	$-\infty / +\infty$	$\downarrow$	0
						$\uparrow$



4. Låt $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.

Bestäm inversen till $y = f(x)$.

Bestäm också inversens definitions- och värdemängd.

(6p)

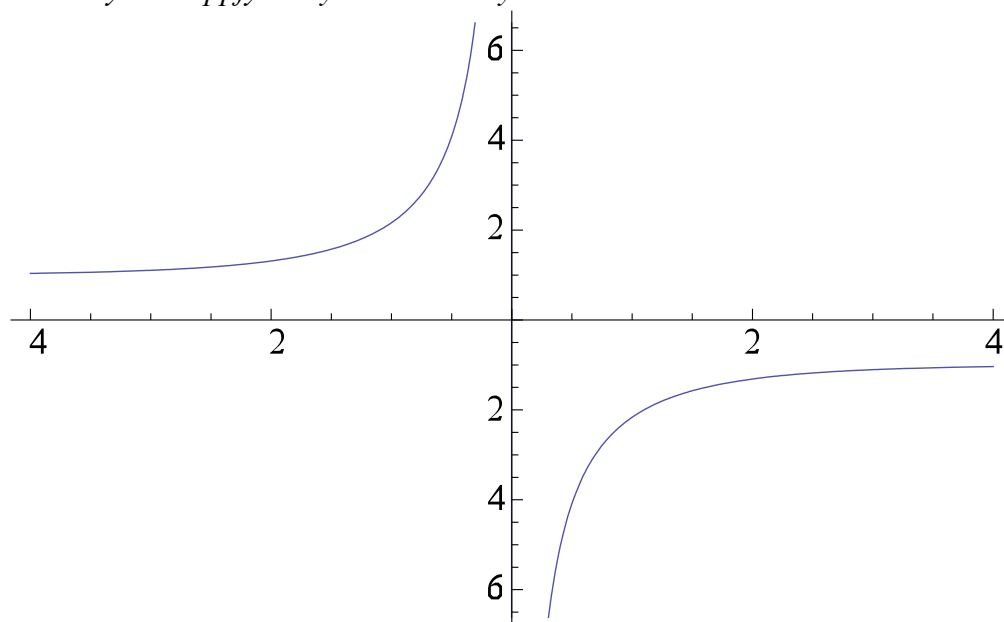
Lösning: sätt $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ och lös ut x ; man får $x = \ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right)$ och det följer

att $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Inversens värdemängd är densamma som funktionens definitionsmängd, dvs alla $x \neq 0$.
Inversens definitionsmängd är densamma som funktionens värdemängd som man bestämmer genom att rita kurvan.

Eftersom $f' > 0$, $f \rightarrow 1$ då $x \rightarrow -\infty$, $f \rightarrow -1$ då $x \rightarrow \infty$, samt

$f \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^-$, $f \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0^+$ kommer denna värdemängd bestå av alla tal y som uppfyller $y > 1$ eller $y < -1$



5. Låt $f(x) = t^2 x - \frac{x^3}{3}$.

Låt $m(t)$ beteckna det minsta värdet för $f(x)$ då $0 \leq x \leq 1$

Rita kurvan $y = m(t)$ då $-1 \leq t \leq 1$.

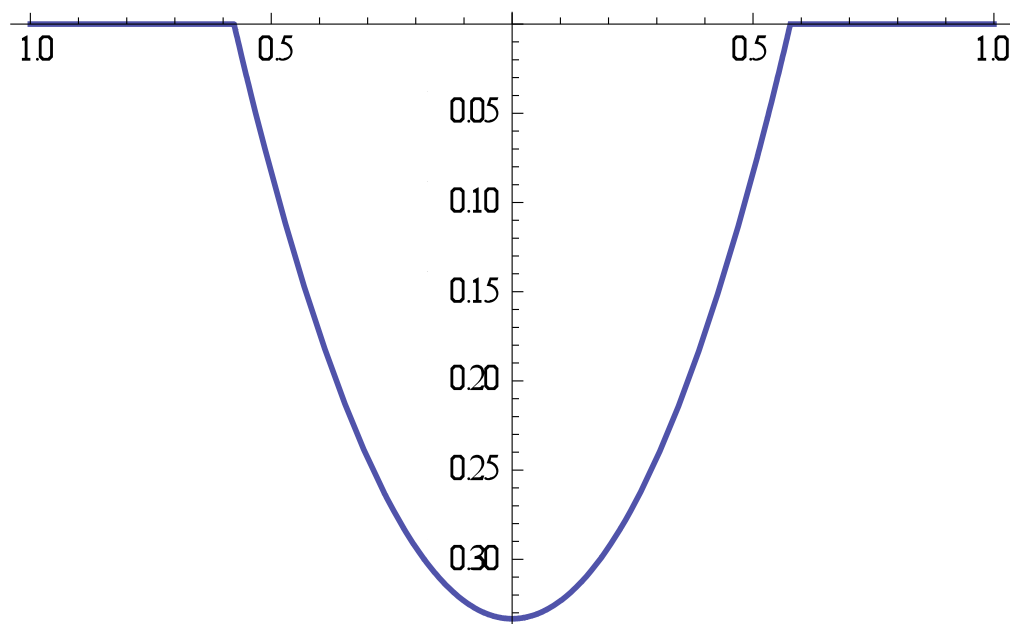
(6p)

Lösning: funktionen är kontinuerlig och intervallet kompakt;

$f'(x) = t^2 - x^2$, $= 0$ då $x = |t|$ och man ser lätt att detta är ett maximum.

Minsta värdet hittar man alltså i någon av ändpunkterna: $f(0) = 0$, $f(1) = t^2 - \frac{1}{3}$.

$$\text{Så } m(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } |t| > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ t^2 - \frac{1}{3} & \text{om } |t| < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Någon motivering krävs ej. Rätt svar ger 1 poäng, inget svar 0 poäng och fel svar -1 poäng. Dock är 0 minsta poäng totalt.

a) $\tan(\arctan x) = x$ för alla reella x .

S

b) Om funktionen $f(x)$ är begränsad är också $f'(x)$ begränsad

F

c) $\bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$ för alla vektorer $\bar{a}$ och $\bar{b}$ i $\mathfrak{R}^3$

S

d) $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ om θ är reellt.

S

e) Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara och $f(x)g(x) = 1$ då är $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$ **S**

f) Om $f(x)$ är deriverbar för alla x måste $g(x) = |f(x)| + 1$ vara deriverbar för alla x . **F**

7.

(6p)

a) Skriv upp och bevisa formeln för avståndet mellan en punkt och ett plan.

b) Visa att avståndet mellan de parallella planen $ax + by + cz + d_1 = 0$

och $ax + by + cz + d_2 = 0$ är $D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$