
Ange den tillfälliga tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyget 3, 30 – 39 poäng ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5.
Bonuspoäng från duggor hösten 2010 räknas in.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida.
Resultat meddelas via Ladok cirka tre veckor efter tentamenstillfället.

1) Till denna uppgift skall **endast svar lämnas in**, alltså inga motiveringar.

a) Bestäm alla komplexa tal z sådana att $z^4 + 16i = 0$ (svara gärna med polär form). (2p)

b) Låt $f(x) = 2x + 3e^x - 1$. Bestäm $(f^{-1})'(2)$ (2p)

c) Bestäm, för varje värde på konstanten a , lösningarna till systemet
$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$
 (2p)

d) Lös ekvationen $e^{2x} + e^x = 6$ (2p)

e) Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = \sin\left(\frac{\pi|x|}{2(x-1)}\right)$ (3p)

f) Beräkna följande gränsvärden:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x^2 - x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} |\ln x|^{\ln x}$ iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(e^{-\frac{x}{\ln x}}\right)$ (3p)

Till uppgifterna 2-5 skall fullständiga lösningar lämnas in. 6 poäng per uppgift

2) Planet π innehåller de tre punkterna $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ samt $(-1, -3, 1)$.
Bestäm alla de plan som ligger på avståndet 10 från π .

3) Låt $f(\theta) = \frac{1}{a \sin \theta \cos \theta - b \cos^2 \theta}$ där a och b är positiva konstanter.

Bestäm det minsta värdet på T sådant att $f(\theta)$ är definierad på intervallet $T < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Bestäm sedan det minsta värdet av $f(\theta)$ på detta intervall.

- 4) Låt f vara en deriverbar funktion sådan att $f(x_1) = x_2$ och $f(x_2) = f(x_1)$ för några tal x_1 och x_2 .

Sätt $g(x) = f(f(f(f(x))))$ och visa att $g'(x_1) = g'(x_2)$

- 5) Rita kurvan $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 2}$.

Ange lokala extrempunkter och asymptoter.
Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.

- 6) Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivering krävs ej. Rätt svar ger 1 poäng, fel svar -1 poäng. Dock är 0 minsta poäng totalt.

a) Om $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $\bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$

b) $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} > 2$

c) Om z är ett komplext tal sådant att både z^4 och z^7 är reella måste z självt vara reellt.

d) Om f är en växande funktion och g är en avtagande funktion som är > 0 är $\frac{f}{g}$ växande.

e) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ är definierat för alla reella x .

f) Om $h(x) = f(x)g(x)$ är $h''(x) = f''(x)g(x) + f(x)g''(x)$

7)

a) Formulera medelvärdessatsen. **(1p)**

b) Formulera och bevisa Rolles sats. **(3p)**

c) Antag att f är en deriverbar funktion sådan att $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$ för alla x och y , och någon konstant M . Visa att f är konstant. **(2p)**