Tentamen 2010-10-23 : Lösningar

1 (a) Det finns två fall, antingen

$$x-5 \geq 0 \text{ och } 3-x > 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \text{ och } x < 3, \text{ en motsägelse,}$$

eller

$$x-5 \leq 0 \text{ och } 3-x < 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \text{ och } x > 3, \Leftrightarrow x \in (3,5].$$

SVAR : $x \in (3,5]$.

(b) Systemets utökade matris är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 1 \\ 2 & -1 & 4 & \mid & 1 \end{pmatrix}.$$

Via radoperationerna

$$R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 5R_2,$$

förvandlas systemet till trappstegsformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 2 \end{pmatrix}.$$

Den sista raden lyder $0 = 2$, en motsägelse, som innebär att systemet har inga lösningar.

(c) Linjen $x = 3$ är en lodrät asymptot. När $x \to \pm\infty$ så går $\frac{1-x}{(x-3)^2} \to 0$, som innebär att linjen $y = 2x - 3$ är en sned asymptot.

(d) Kalla vinkeln över horisonten för θ och ballongens höjd för h. Båda dessa är funktioner av tiden. Vi söker dh/dt i det ögonblick där $\theta = \pi/4$. Det är också givet att $d\theta/dt = 0.025 = 1/40$. Från geometrin ser vi att förhållandet mellan h och θ är

$$\tan\theta = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100\tan\theta.$$

Deriverar vi båda leden m.a.p. t så härleder vi att

$$\frac{dh}{dt} = 100\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Insättning vid $\theta = \pi/4$ ger alltså

$$\frac{dh}{dt} = 100(\sqrt{2})^2 \frac{1}{40} = 5 \ m/s.$$

(e) (i) Gränsvärdet är noll. Exponentialen i nämnaren slår polynomet och logaritmen i täljaren.
(ii) Vi använder standardgränsvärdena

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1.$$

Vi skriver om uttrycket så här :

$$\frac{\sin(x-1)}{\tan(x^2-1)} = \left[\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right] \times \left[\frac{x^2-1}{\tan(x^2-1)}\right] \times \left[\frac{x-1}{x^2-1}\right].$$

Från standardgränsvärdena erhåller vi att de två första parenteserna går mot 1 då $x \to 1$. I den tredje parantesen kan vi bryta ut $x-1$ och har kvar bara $\frac{1}{x+1}$. Detta är kontinuerlig och går mot $1/2$ då $x \to 1$.

Svar : Gränsvärdet är $1/2$.

(iii) Här använder vi standardgränsvärdet

$$e = \lim_{\theta \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)^{\theta}.$$

Vi skriver om uttrycket som

$$\left[\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x/5}\right]^{10},$$

och därmed härleder direkt att gränsvärdet är e^{10}.

(f) Kom ihåg att, för $x \in [-1, 1]$,

$$\arccos(x) = \text{den unika vinkel } \theta \in [0, \pi] \text{ sådan att } \cos\theta = x.$$

Per definition av $f(x)$ har vi i stället, för $x \in [-1, 1]$, att

$$f^{-1}(x) = \text{den unika vinkel } \psi \in [\pi, 2\pi] \text{ sådan att } \cos\psi = x.$$

Eftersom $\psi = 2\pi - \theta$ så måste $f^{-1}(x) = 2\pi - \arccos(x)$.

2 (a) De två planen ger ett linjärt ekvationssystem vars utökade matris är

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Via radoperationen $R_2 \mapsto R_2 - 2R_1$ erhålls trappstegsformen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Så z är en fri variabel, $y = -1$ och $x - (-1) + z = 2 \Rightarrow x = 1 - z$. Så lösningsmängden är en linje L som ges i parameterform av

$$L = \{(1, -1, 0) + z(-1, 0, 1) : z \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Vi använder formeln

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

för avståndet mellan punkten (x_0, y_0, z_0) och planet $ax + by + cz = d$. Här är $(x_0, y_0, z_0) = (4, 2, 6)$ och $a = 2, b = -1, c = 2, d = 3$. Insättning ger att avståndet är

$$\frac{|2(4) - 1(2) + 2(6) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5.$$

(c) Normalen till planet har riktningen $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. En enhetsvektor i denna riktning är

$$\hat{n} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Den punkt P i planet som ligger närmast $(4, 2, 6)$ är den punkt som är 5 längdenheter bort från $(4, 2, 6)$ längs normalen. Iofs vet vi inte om vi ska gå 'upp' eller 'ner' längs normalen för att hamna i planet, så det finns två möjligheter för P, antingen

$$(4, 2, 6) - \frac{5}{3}(2, -1, 2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

eller

$$(4, 2, 6) + \frac{5}{3}(2, -1, 2) = \left(\frac{22}{3}, \frac{1}{3}, \frac{28}{3}\right).$$

För att se vilket alternativ som är korrekt så sätter vi in båda i planets ekvation $2x - y + 2z = 3$. Därmed konstaterar man att det är det första alternativet $(2/3, 11/3, 8/3)$ som uppfyller planets ekvation, och därför är denna den punkt i planet som ligger närmast $(4, 2, 6)$.

3. Steg 1 : Bestäm definitionsmängden och beteendet i närheten av eventuella lodräta asymptoter.

Vi konstaterar direkt att $x = 5$ är en lodrät asymptot och att

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty.$$

Steg 2 : Undersök beteendet då $x \to \pm\infty$ och bestäm eventuella vågräta aller sneda asymptoter.

Man konstaterar att

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Så $y = 0$ (dvs x-axeln) är en vågrät asymptot, men bara i den positiva x-riktningen.

Steg 3 : Hitta och klassificera de kritiska punkterna.

Från Steg 1 och 2 kan vi redan inse att det måste finnas minst en kritisk punkt, nämligen en lokal maximum någonstans i intervallet $(-\infty, 5)$. För att hitta alla de kritiska punterna, vi deriverar enligt kvotregeln och får att

$$f'(x) = \frac{(x-5)(-e^{-x}) - (e^{-x})(1)}{(x-5)^2} = \frac{e^{-x}(4-x)}{(x-5)^2}.$$

I en kritisk punkt är $f'(x) = 0$, så täljaren ovan måste vara noll, dvs

$$e^{-x}(4-x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Så det finns bara en kritisk punkt och från tidigare arbete vet vi redan att det måste röra sig om en lokal maximum.

Steg 4 : Rita grafen. Notera att $f(4) = -1/e < 0$, så f antar endast negativa värden då $x \in (-\infty, 5)$. Eftersom det finns inga kritiska punkter i

$(5,\infty)$ så måste f vara strängt avtagande i det intervallet. Nu kan vi rita grafen :

4 (a,b) Först notera vad som händer runt punkterna $x = \pm 1$, där f byter form :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 3(-1)^2 + \ln(1) = 3, \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = 4(-1) + \cos(-\pi) = -5, \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = 4(1) + \cos(\pi) = 3, \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1e^0 - 6 = -5. \end{aligned}$$

Vi kan derivera styckvis och konstatera att

$$f'(x) = \begin{cases} 6x + 1/x, & \text{då } x < -1, \\ 4 - \pi\sin(\pi x), & \text{då } -1 < x < 1, \\ (1-x)e^{1-x}, & \text{då } x > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Alltså är $f(x) < 0$ både när $x < -1$ och när $x > 1$, medan att $f(x) > 0$ när $-1 < x < 1$. Så nu vet vi ungefär hur funktionen ser ut :

1. $f(x)$ är strängt avtagande då $x \in (-\infty, -1]$ och minskar från $+\infty$ till 3.
2. $f(x)$ är strängt växande då $x \in (-1, 1)$ och ökar från -5 till 3. Notera att ändvärdena antas inte.
3. $f(x)$ är strängt avtagande då $x \in [1, \infty)$ och minskar från -5 till $-\infty$.

Att $f(x)$ aldrig antar samma värde vid olika x-värden innebär dessutom att f är injektiv och därmed inverterbar.

(c) Vi har den allmänna formeln

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{2}$$

Här är $x = 1$. Per definition,

$$f^{-1}(1) = \text{det unika } t \text{ sådan att } f(t) = 1.$$

Man ser direkt att $f(0) = 4(0) + \cos(0) = 1$, så $t = 0$. Insättning i (2) ger nu att

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)}.$$

Från (1) ser vi att $f'(0) = 4 - \pi \sin(0) = 4$, så $(f^{-1})'(1) = 1/4$ ... SVAR.

5. Låt F vara skärningspunkten mellan linjerna genom AO och CD. Vi kan dela upp det L-formade området i två rektangler, $ABCF$ och $FDEO$. Vi kan anta att cirkeln har radie 1, för att underlätta beräkningarna. Då har vi att

$$|AO| = |OE| = \cos v, \quad |DE| = |AB| = \sin v.$$

Vi härleder att

$$\begin{aligned} \text{Area}(ABCF) &= |AB| \times |BC| = (\sin v)(\cos v - \sin v), \\ \text{Area}(FDEO) &= |DE| \times |OE| = (\sin v)(\cos v). \end{aligned}$$

Kalla det L-formade områdets totala area för $f(v)$. Då har vi att

$$f(v) = \sin v(\cos v - \sin v) + \sin v \cos v = 2 \sin v \cos v - \sin^2 v = \sin 2v - \sin^2 v.$$

Vi söker en lokal maximum för denna funktion. Derivering ger

$$f'(v) = 2 \cos 2v - 2 \sin v \cos v = 2 \cos 2v - \sin 2v.$$

Vid en kritisk punkt är derivatan noll, så

$$0 = 2 \cos 2v - \sin 2v \Rightarrow \tan 2v = 2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} 2\right) \approx 31,72^\circ.$$

6 (a) FALSKT. I polär form är

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}.$$

Från De Moivres sats härleder vi att

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{93} = \cos \frac{93\pi}{4} + i \sin \frac{93\pi}{4}.$$

Men $93/4 = 11 \cdot 2 + 5/4$ så

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{93} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right).$$

(b) SANT. Låt $z = \cos \theta + i \sin \theta$, så

$$z^9 = \cos 9\theta + i \sin 9\theta = -1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

som medför att

$$\theta = \frac{\pi}{9} + \left(\frac{2\pi}{9}\right)n, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Den reella delen av z blir positiv om och endast om θ ligger i den första eller den fjärde kvadranten. Den ligger i den första kvadranten för $n = 0, 1$ och i den fjärde kvadranten för $n = 7, 8$.
(c) FALSKT. Ty $\sin\theta \leq 1$ för alla $\theta \in \mathbb{R}$ så kan VL aldrig överstiga 6. Så ekvationen har faktiskt inga lösningar alls.
(d) FALSKT. T.ex. tag $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ och $a = 0$. Då gäller att $\lim_{x\to 0} |f(x)| = 1$. Men $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar ej, ty $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$ medan att $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.
(e) SANT. Låt θ vara vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. Då har vi att

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|| &= ||\boldsymbol{a}|| ||\boldsymbol{b}|| \sin\theta, \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= ||\boldsymbol{a}|| ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta. \end{aligned}$$

Därför är

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 ||\boldsymbol{b}||^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = ||\boldsymbol{a}||^2 ||\boldsymbol{b}||^2.$$

(f) SANT. Vi tillämpar Rolle sats tre gånger. Eftersom f är deriverbar och $f(0) = f(1) = 0$ så måste det finnas $c_1 \in (0, 1)$ sådan att $f'(c_1) = 0$. På samma sätt, eftersom $f(1) = f(2) = 0$ måste det finnas $c_2 \in (1, 2)$ sådan att $f'(c_2) = 0$. Men f har andraderivata, dvs f' är också deriverbar. Eftersom $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$ så måste det finnas $c \in (c_1, c_2)$ sådan att $f''(c) = 0$, v.s.v.

7 (a) Definition 4, page 99 in the textbook.
(b) Theorem 9, page 121 in the book. You will need to use Theorem 8 and Example 1, but you do not need to include a proof of the former.