MVE011

24/8 -2011

1

a) $z=2e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)}$, $n=0,1,2,3.$

f) i) -2 ii) 0 iii) 1

Lösningar till tentan för TMV125
2011-08-24

1. Till denna uppgift skulle bara lämnas svar, ~~men~~ här ges lite mera.

   a) ~~För vilka reella tal är~~ $\sin\left(\frac{x-5}{3-x}\right) \geq 2$?

   ~~Eftersom sinus aldrig kan bli större än 1, så är olikheten~~ **inte sann för något reellt tal** x.

   b) Låt $f(x) = 2x + 3e^x - 1$. Existerar derivatan $(f^{-1})'(2)$? Om den finns, beräkna den.

   Vi deriverar: $f'(x) = 2 + 3e^x$. Denna derivata är positiv för alla x och därmed finns inversen och den är deriverbar med $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ där $y = f(x)$. Vi ser att $f(0) = 2$, alltså är $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}$

   c) Bestäm för varje värde på konstanten a lösningarna till ekvationssystemet $\begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

   För $a = -2$ har systemet oändligt många lösningar (trappstegsmatrisens andra rad är en nollrad): $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$.

   För alla andra värden på a får vi entydig lösning: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

   d) Lös ekvationen $e^{2x} + e^x = 6$.

   Sätt $t = e^x$, ekvationen blir $t^2 + t = 6$. Denna andragradsekvation har lösningarna $t = 2$, $t = -3$. Eftersom $e^x > 0$ ger bara den förra roten en lösning: $e^x = 2 \Rightarrow$ $\mathbf{x = \ln 2}$.

   e) Beräkna följande gränsvärden:

   $$\alpha)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + (\ln x)^{10}}{x + e^{3x}} \qquad \beta)\ \lim_{x\to 0} \frac{4x + \sin x}{2x + \sin x} \qquad \gamma)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x^2 - x}$$

   α) Vi förkortar med det dominerande uttrycket e^{3x}:

   $$\frac{x^5 + (\ln x)^{10}}{x + e^{3x}} = \frac{\frac{x^5}{e^{3x}} + \frac{(\ln x)^{10}}{e^{3x}}}{\frac{x}{e^{3x}} + 1} \to \frac{0+0}{0+1} = \mathbf{0} \text{ då } x \to \infty$$

   enligt kända gränsvärdeslagar för exponential- polynom- och logaritmfunktioner.

   β) Här förkortar vi med noll och använder det kända gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

   $$\frac{4x + \sin x}{2x + \sin x} = \frac{4 + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}} \to \frac{4+1}{2+1} = \mathbf{\frac{5}{3}} \text{ då } x \to 0.$$

   γ) Vi använder samma gränsvärde som i föregående gränsvärde:

   $$\frac{\tan 2x}{x^2 - x} = \frac{\sin 2x}{x(x-1)\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{2x} \frac{2}{(x-1)\cos 2x} \to 1 \cdot \frac{2}{(-1)\cdot 1} = \mathbf{-2}$$

   då $x \to 0$.

f) Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = \sin\left(\frac{\pi|x|}{2(x-1)}\right)$ $(x \neq 1)$. (3p)

Uttrycket saknar gränsvärde då $x \to 1$ (vinkeln går mot ∞ från höger och mot $-\infty$ från vänster, i båda fallen saknar sinus gränsvärde). Däremot går vinkeln mot $\frac{\pi}{2}$ då $x \to \infty$ respektive mot $-\frac{\pi}{2}$ då $x \to -\infty$, vilket gör att sinusuttrycket går mot 1 respektive -1. Slutsats: Det finns två vågräta asymptoter: $\mathbf{y = -1}$ (i $-\infty$) och $\mathbf{y = 1}$ (i $+\infty$).

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Ett plan π innehåller de tre punkterna $(2,1,0)$, $(1,1,1)$ och $(-1,-3,1)$.
Bestäm en ekvation för π och ekvationer för de plan som är parallella med π och ligger på avståndet 6 längdenheter från π.

För att bestämma en normalvektor till alla planen, bilda två vektorer parallella med planen med hjälp av de givna punkterna:

$$\boldsymbol{u} = (2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1), \quad \boldsymbol{v} = (2,1,0) - (-1,-3,1) = (3,4,-1)$$

Vektorprodukten (kryssprodukten) av dessa vektorer är en normalvektor till alla planen:
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (1,0,-1) \times (3,4,-1) = (4,-2,4)$. Vi tar halva denna som normalvektor: $\boldsymbol{n} = (2,-1,2)$ och vet då att alla de tre planen har en ekvation av typen $2x - y + 2z = D$. För att bestämma D behöver vi en punkt i varje plan. I det första planet kan vi välja en av tre givna, t ex $P_1 = (2,1,0)$, för de andra tar vi ett steg av rätt längd i normalens riktning. Normalvektorn $\boldsymbol{n}$ har längden $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$, så $2\boldsymbol{n}$ har just längden 6. Vi väljer de nya punkterna som $P_2 = (2,1,0) + 2\boldsymbol{n} = (6,-1,4)$ respektive $P_3 = (2,1,0) - 2\boldsymbol{n} = (-2,3,-4)$. Genom att i tur och ordning sätta in P_1, P_2, P_3 i $2x - y + 2z = D$, så kan vi bestämma respektive D-värde. Vi får planen

$$\mathbf{2x - y + 2z = 3}, \quad \mathbf{2x - y + 2z = 21}, \quad \mathbf{2x - y + 2z = -15}.$$

MATEMATIK
Chalmers

---

3. Skissera grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{x-2}$. Ange eventuella asymptoter och lokala extrempunkter. Konkavitet/konvexitet behöver ej utredas.

Först konstaterar vi att $f(x) \to -\infty$ och $f(x) \to +\infty$ då $x \to 2^-$ respektive $x \to 2^+$. Detta innebär att grafen har en *lodrät asymptot* $x = 2$, men ingen annan sådan eftersom $f(x)$ är definierat för alla $x \neq 2$.

Då $|f(x)| \to \infty$ då $x \to \pm\infty$, kan det bara finnas *sneda asymptoter* i $\pm\infty$. För att finna eventuella sådana beräknar vi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1$$

som är möjlig riktningskoefficient k för en asymptot. För den skull beräknar vi

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+6x+9}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x+9}{x-2} = 8,$$

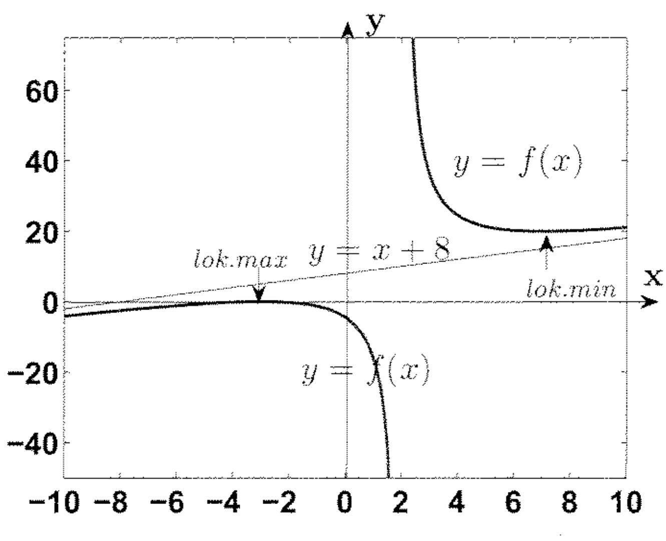
vilket innebär att $y = x + 8$ är asymptot i $\pm\infty$. Därmed är asymptotutredningen klar. Vi deriverar nu $f(x)$ efter en praktisk omskrivning:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{(x+3)^2}{x-2} = \frac{2(x+3)(x-2)-(x+3)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x+3)(2(x-2)-(x+3))}{(x-2)^2} =$$

$= \dfrac{(x+3)(x-7)}{(x-2)^2}$, så derivatans nollställen är $x = -3$ och $x = 7$. Vi samlar nu alla viktiga fakta i en tabell till stöd för grafritningen.

x	$-\infty$		-3		2		4,5		∞
$f'(x)$		+	0	−	odef	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	odef	↘	22,5	↗	∞

Vi ritar grafen:



Asymptoter: $\mathbf{x = 2}$, $\mathbf{y = x + 8}$, lok max för $\mathbf{x = -3}$, lok min för $\mathbf{x = 7}$.

MATEMATIK
Chalmers

---

4. Bestäm minsta värdet (om det finns) och största värdet (om det finns) av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \sin\left(\frac{3}{x+2}\right) & \text{då} \quad x < -2 \\ \frac{x^2-3}{x+2} & \text{då} \quad x > -2 \end{cases}$$

Först konstaterar vi att funktionen varierar mellan $3 - 1 = 2$ och $3 + 1 = 4$ för $x < -2$, eftersom sinusfunktionen varierar mellan -1 och 1. Återstår att utreda $x > -2$. Man kan se att $f(x) \to +\infty$ då $x \to -2^+$ och att $f(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$. Något största värde finns alltså inte. Vad händer mellan $x = -2$ och ∞? Vi deriverar:

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

så vi ser att derivatan har ett nollställe i intervallet, $x = -1$, med teckenväxlingen $-0+$, alltså ett minimum. Eftersom $f(-1) = -2$, så visar en jämförelse med intervallet $x < -2$ som vi började med, att detta är funktionens absoluta minimum.
Inget största värde, minsta värde -2.

Uppgift 5 på nästa sida!

4 $g'(x) = f'\big(f\big(f\big(f(x)\big)\big)\big) \cdot f'\big(f\big(f(x)\big)\big) \cdot f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$

och då blir $g'(x_1) = g'(x_2) = \big(f'(x_1)\big)^2 \cdot \big(f'(x_2)\big)^2$

5. Betrakta funktionsuttrycket

$$f(x) = \frac{1}{a\sin x\cos x - b\cos^2 x}$$

där a och b är positiva konstanter. Detta definierar en funktion på ett intervall $(T, \frac{\pi}{2})$. Bestäm talet T (så litet som möjligt) och beräkna därefter det minsta värdet av $f(x)$ i intervallet.

Vi skriver funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\cos x(a\sin x - b\cos x)}$$

och konstaterar att uttrycket inom parentes i nämnaren går mot $a > 0$ då $x \to \frac{\pi}{2}$. Om vi låter x avta från $\frac{\pi}{2}$, så avtar sinustermen och växer cosinustermen och det måste finnas en punkt $x = T$ där parentesen blir noll. Detta T begränsar det intervall där f kan definieras. Vi löser ut T:

$$a\sin T - b\cos T = 0 \iff \tan T = \frac{b}{a}$$

I det aktuella området blir lösningen till denna ekvation $\mathbf{T} = \arctan\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$.

Nu återstår att minimera $f(x)$, dvs att maximera $g(x) = a\sin x\cos x - b\cos^2 x$ över intervallet $(\arctan\frac{b}{a}, \frac{\pi}{2})$. Eftersom $g(x)$ är noll i $x = T$ och i $x = \frac{\pi}{2}$ och $g(x) > 0$ i $(T, \frac{\pi}{2})$ samt är en deriverbar (därmed kontinuerlig) funktion, så måste $g(x)$ ha ett största värde i intervallet, och dess derivata måste vara noll där.

$$g'(x) = -a\cos^2 x + a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x = a\cos 2x + b\sin 2x$$

$$g'(x) = 0 \iff \tan 2x = -\frac{a}{b}$$

Enda möjliga lösning i vårt intervall måste vara $x_0 = \frac{1}{2}\arctan(-\frac{a}{b}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{b}$.

Man kan också skriva om x_0 lite för att se relationen till T:
$x_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{b} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{b}{a}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a} = \frac{\pi}{4} + \frac{T}{2}$
Alltså är x_0 mittpunkten i vårt intervall: $x_0 = \dfrac{T + \frac{\pi}{2}}{2}$.

Största värdet av $g(x)$? Vi gör en omskrivning av $g(x)$ med dubbla vinkeln:
$g(x_0) = \frac{1}{2}(a\sin 2x_0 - b(1+\cos 2x_0)) = \frac{1}{2}(a\sin(\pi - \arctan\frac{a}{b}) - b(1+\cos(\pi - \arctan\frac{a}{b}))) =$
$\frac{1}{2}(a\sin(\arctan\frac{a}{b}) - b + \cos(\arctan\frac{a}{b}))$

Om vi ritar en hjälptriangel med kateterna a och b samt hypotenusan $\sqrt{a^2+b^2}$ kan vi lätt hitta de sinus- och cosinusvärden som behövs här (det handlar ju om spetsiga vinklar här!). Vi ser då att
$\sin(\arctan\frac{a}{b}) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos(\arctan\frac{a}{b}) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Detta ger $g(x_0) = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - b + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - b)$
och minsta värdet av vår ursprungliga funktion är $f(x_0) = \dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}} - \mathbf{b}}$.

6 S S S F S F

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

a) Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0$.

Sant. Kryssprodukten är ju ortogonal mot de ingående vektorerna.

b) Om f och g är deriverbara och om $h(x) = f(x)g(x)$, så är $h''(x) = f''(x)g(x) + f(x)g''(x)$.

Falskt. Testa med valda funktioner!

c) Om $0 < x < \frac{\pi}{2}$ så är $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} > 2$.

Sant. I intervallet är ju $0 < \sin x < 1$ och $0 < \cos x < 1$, så $\frac{1}{\sin x} > 1$ och $\frac{1}{\cos x} > 1$.

d) För alla komplexa tal z gäller att $\mathrm{Re}(z^2) \geq 0$.

Falskt. Testa med $z = i$!

e) Om $f'(x) > 0$ för varje reellt tal x, så gäller att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$.

Falskt. Exemplet $f(x) = \arctan x$ visar att en sådan funktion kan vara begränsad.

f) Funktionen $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ är definierad för alla reella tal x.

Sant. Eftersom $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$, så är $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, och tillhör därmed definitionsmängden för arcsin.

7. a) Formulera medelvärdessatsen.

Se läroboken!

b) Använd medelvärdessatsen för att bevisa att en funktion vars derivata är noll i ett intervall måste vara konstant i intervallet.

Se läroboken!

c) Antag att f är en deriverbar funktion sådan att för alla reella tal x och y gäller att $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^2$, där M är en konstant. Bevisa att f är konstant.

Av ovanstående, med $x + h$ istället för y, följer att $\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq M|h|$
Av instängningsregeln följer att gränsvärdet $f'(x)$ måste vara noll för alla x, och då vet vi enligt (b) ovan att funktionen är konstant.