Standard gränsvärden med logaritm, polynom och exponentialfunktion

Vi ska jämföra funktioner av tre typer, logaritm, potensfunktion, och exponentialfunktion, när alla är strängt växande då x är tillräckligt stort.

Potensfunktionen $f(x) = x^a$ är strängt avtagande för positiva x om $a < 0$ och strängt växande om $a > 0$. I allmänhet är x^a bara definierat när $x > 0$, men för vissa rationella tal a är x^a definierat för alla reella tal x. Det gäller t.ex. när a är ett positivt heltal, eller $1/n$ där n ett udda heltal. För $a > 0$ är $0^a = 0$.

Exponentialfunktionen e^{kx} är strängt växande om $k > 0$ och strängt avtagande om $k < 0$.

Vi ska se att en strängt växande exponentialfunktion dominerar över varje strängt växande potensfunktion som i sin tur dominerar över $\ln x$, när $x \to \infty$.

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

  Bevis: $Q = (\ln x)/x$ ger ett gränsvärde av typen "∞/∞" när $x \to \infty$, så vi prövar med att använda l'Hospitals regel. Derivering av täljare och nämnare för sig ger kvoten

  $$Q_1 = \frac{1/x}{1},$$

  som har gränsvärdet 0 när $x \to \infty$. l'Hospitals regel ger att även Q har detta gränsvärde. $\square$

- Om $a >$ (så att x^a är strängtväxande för positiva x) gäller att

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.$$

  Bevis: Om skrivning ger

  $$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\ln x^a}{x^a} \to \frac{1}{a} \cdot 0 = 0,$$

  när $x \to \infty$, eftersom $x^a \to \infty$ då.

  Vi har därmed sett att en växande potensfunktion dominerar över $\ln x$, när $x \to \infty$.

- Om $a > 0$ (så att x^a är strängt växande för positiva x) och $b > 0$ (så att e^{bx} är strängt växande) gäller att

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0.$$

  Bevis: Vi sätter $x = \ln t$ och har att $x \to \infty$ då motsvaras av att $t \to \infty$. Vi får

  $$\frac{x^a}{e^{bx}} = \left(\frac{\ln t}{t^{b/a}}\right)^a,$$

  som $\to 0^a = 0$, då $x \to \infty$, eftersom $b/a > 0$. $\square$

  Vi har därmed sett att en strängt växande exponentialfunktion dominerar över en strängt växande potensfunktion, när $x \to \infty$.

- För $a > 0$ (så att $x^a \to 0^+$, när $x \to 0^+$) gäller att

  $$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x = 0.$$

  OBS: $x^a \to 0$ och $\ln x \to -\infty$, när $x \to 0^+$, så gränsvärdet är av typen "$(-)0 \cdot \infty$".

  Bevis: Sätter vi $t = x^a$ har vi

  $$x^a \ln x \quad = \quad \frac{1}{a} \cdot x^a \ln(x^a) = \frac{1}{a} \cdot t \ln t,$$

  så det räcker att visa att $\lim_{t \to 0^+} t \ln t = 0$. Sätter vi $Q = t \ln t = (\ln t)/(1/t)$ har vi ett gränsvärde av typen "0/0," då $t \to 0^+$. Vi prövar med l'Hospitals regel. Derivering av täljare respektive nämnare ger kvoten

  $$Q_1 = \frac{1/t}{-1/t^2} = -t,$$

  som har gränsvärdet 0, när $t \to 0^+$. l'Hospitals regel ger att även Q har detta gränsvärde. $\square$