Kortfattade lösningar till tentan MVE011 2014-08-27

1. (a) $\ln(\ln x) = 1 \iff \ln x = e \iff \mathbf{x = e^e}$.

(b) Då täljaren är $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ är positiv för alla reella x, så beror kvotens tecken bara på nämnaren. Detta ger lösningen $\mathbf{x < -1}$.

(c) $$\frac{(1-\sqrt{3}i)^9(1+i)^{12}}{(2i)^{13}} = \frac{\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^9(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{12}}{2^{13}\cdot i^{12}i} = \frac{2^9e^{-9\pi i}2^6e^{9\pi i}}{2^{13}i} = \frac{2^2}{i} = \mathbf{-4i}.$$

(d) Minsta värdet noll antas då $\cos x = n\pi$, n heltal. Denna ekvation har lösning bara om $n = 0$. Då är lösningarna $\mathbf{x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}}$.

(e) Den utökade koefficientmatrisen för systemet övergår genom radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 2 & a^2 & 6 \\ 1 & 2 & a+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 0 & a^2-4 & 4-2a \end{bmatrix}$$

Lösning saknas om vi har ett pivotelement i högerledet, vilket innebär att $a^2 - 4 = 0,\ 4 - 2a \neq 0$. detta gäller bara om $\mathbf{a = -2}$.

(f)

$$\frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \text{konjugatförlängning} = \frac{\tan x - \sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} =$$

$$= \frac{\sin x(\frac{1}{\cos x} - 1)}{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} = \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$$

Kvot nummer två kan behandlas med konjugatförlängning eller med l'Hôpitals regel:

$$u(x) = 1 - \cos x,\ v(x) = x^2 \ \Rightarrow\ u'(x) = \sin x,\ v'(x) = 2x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Den första kvoten går mot 1, den tredje mot 1 och den fjärde mot $\frac{1}{2}$. Därmed blir det sökta gränsvärdet $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

2. (a) L kan uttryckas i parameterform:

$$t = x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{3} \iff x = 1+t,\ y = 2t,\ z = 1-3t$$

Skärningspunkten ges av ekvationssystemet av linjens och planets ekvationer. Parametern t för skärningspunkten kan vi få genom att sätta in uttrycken för x, y, z i planets ekvation:

$$(1+t) - 2\cdot 2t - 2(1-3t) = 5 \ \Rightarrow\ t = 2$$

som ger skärningspunkten $x = 1+2 = 3,\ y = 2\cdot 2 = 4,\ z = 1 - 3\cdot 2 = -5$, alltså punkten $(\mathbf{3, 4, -5})$.

(b) Ur ekvationerna för L får vi en vektor längs L: $\boldsymbol{v} = (1, 2, -3)^T$. Den ligger i (är parallell med) det sökta planet. Om vårt plan ska vara vinkelrätt med planet P, så ska normalvektorn $\boldsymbol{u} = (1, -2, -2)^T$ (ur planets ekvation) också ligga i vårt nya plan. En normalvektor till planet måste vara vinkelrät mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, och kan därför väljas som $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (10, 1, 4)^T$. Vårt plan har därmed en ekvation av typen $10x + y + 2z = D$, insättning av en punkt i planet, t. ex. $(1, 0, 1)$ på linjen L ger oss $D = 14$.
Planet är $\mathbf{10x + y + 4z = 14}$.

3. Eftersom $x^2+8x+18=(x+4)^2+2>0$, så är rotuttrycket definierat för alla reella x, och bara nämnaren inskränker **definitionsmängden:** $\mathbf{D_f}=(-\infty,\mathbf{0})\cup(\mathbf{0},\infty)$.

$f(x)\to-\infty$ då $x\to 0^-$, och $f(x)\to+\infty$ då $x\to 0^+$. y-axeln $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ är **lodrät asymptot**.

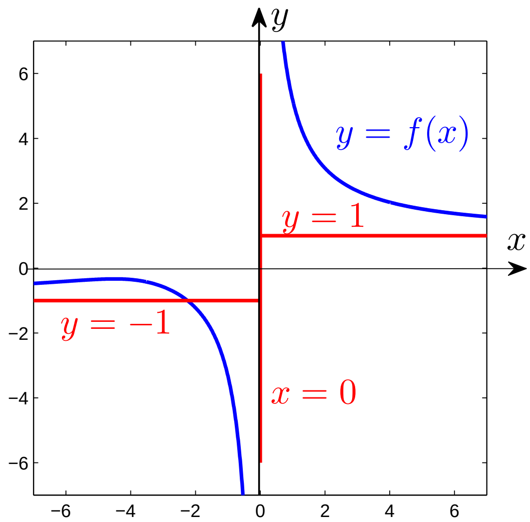
$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{8}{x}+\frac{18}{x^2}}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{18}{x^2}}}{x}\to\begin{cases}-1 & \text{då} \quad x\to-\infty\\ 1 & \text{då} \quad x\to+\infty\end{cases}$$

Härav ser vi att $\mathbf{y}=-\mathbf{1}$ **och** $\mathbf{y}=\mathbf{1}$ **är vågräta asymptoter.**

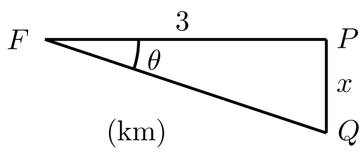
Lokala extrempunkter? Derivera funktionen:

$$f'(x)=\frac{\frac{x(x+4)}{\sqrt{x^2+8x+18}}-\sqrt{x^2+8x+18}}{x^2}=\frac{-4x-18}{x^2\sqrt{x^2+8x+18}}$$

Derivatans enda nollställe är $x=-\frac{9}{2}$, teckenväxlingen för f' kring denna punkt är $+0-$, vilket betyder att vi har ett **lokalt maximum i** $\mathbf{x}=-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$ med $f(x=-\frac{9}{2})=-\frac{1}{3}$. **Värdemängden** är nu också bestämd: $\mathbf{V_f}=(-\infty,-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}]\cup(\mathbf{1},\infty)$. Vi kan nu rita grafen:



4. Om fyren befinner sig i F, så har vi en rätvinklig triangel FPQ, där vinkeln vid P är den räta. $FP=3$ och $PQ=1$ i enheten km. Om vi kallar avståndet från P till en punkt på stranden i riktning mot Q för x, så är det $\frac{dx}{dt}|_{x=1}$ som uttrycker den sökta hastigheten hos ljuskäglan. Vinkeln mellan ljusstrålen och linjen FP kallar vi för θ. Figuren visar läget då $x=1$.



Den hastighet vi känner, är vinkelhastigheten hos ljuskäglan: $\frac{d\theta}{dt}=8\pi$ radianer/minut (=4 varv/minut).

Enligt kedjeregeln gäller $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=8\pi$, så vi behöver x som funktion av θ. I den rätvinkliga triangeln ser vi att $x=3\tan\theta$, så

$$\frac{dx}{dt}=3(1+\tan^2\theta)\cdot 8\pi=(1+(\frac{1}{3})^2)\cdot 8\pi=\frac{80\pi}{3}$$

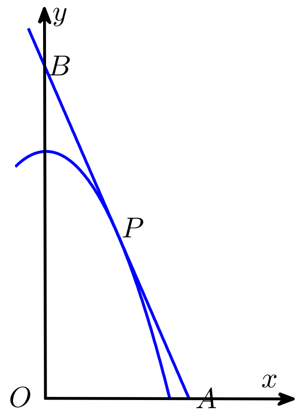
Hastigheten i Q är därmed $\frac{\mathbf{80}\pi}{\mathbf{3}}$ **km/min**. Räknar man i SI-enheter får man istället $\frac{4000\pi}{9}\approx 1400$ m/s.

5. Situationen illustreras av figuren intill. $P = (a, 4 - a^2)$ är den punkt i första kvadranten där hypotenusan tangerar kurvan. O (origo), A och B är triangelns hörn. Vi vill minimera triangelns area $= \dfrac{|OA||OB|}{2}$.

Tangentens riktningskoefficient är $y' = -2a$, dess ekvation är $y-(4-a^2) = -2a(x-a)$. Sätter vi in $y = 0$ och $x = 0$ så får vi x-koordinaten för A respektive y-koordinaten för B:

$|OA| = \dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{a}$, $|OB| = 4 + a^2$. Därmed kan vi uttrycka triangelarean som funktion av a:

$f(a) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{a})(4 + a^2) = \dfrac{(a^2 + 4)^2}{4a}$, $0 < a < 2$.



För att hitta minimum deriverar vi. Efter förenkling:

$$f'(a) = \frac{(a^2 + 4)(3a^2 - 4)}{4a^2}$$

I vårt intervall finns bara ett nollställe till f', nämligen $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, som ger teckenväxlingen $-0+$ för f', alltså ett minimum. Minsta arean blir f($\frac{2}{\sqrt{3}}$)=$\mathbf{\frac{32\sqrt{3}}{9}}$.

6. (a) Om $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ och $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, och om vinkeln mellan vektorerna är α, så har vi:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\alpha = 0, \text{ och } |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \sin\alpha = 0$$

men sådana α finns inte. Alltså är någon av vektorerna nollvektorn. **Sant**.

(b) Med $a = 1$ skulle vi ha $\ln(1 + b) = \ln 1 + \ln b = \ln b$, vilket är falskt för varje b då ln-funktionen är strängt växande. **Falskt**.

(c) Med $x = \pi$ har vi $\arcsin(\sin x) = \arcsin 0 = 0 \neq x$. **Falskt**.

7. Se läroboken!