Ind matte MVE012

Lösningar till tent 30 okt 2014

1)

a) Svar: $-\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3}$

b) Svar: $a = -2$ (men inte $a = 2$!)

c) $f(x) = e^{\frac{\sin 2x}{2}}$ så $V_f = \{ y;\ e^{-1/2} \le y \le e^{1/2} \}$

d) 1 1 -1

e) Implicit derivering:

$y' \cdot \cos x - y \sin x = \cos(xy) \cdot [y + xy']$

$x = 0$, ~~x~~ $y = 1$ ger $y' = 1$

Svar $y = x + 1$

f) $f^{-1}(x) = \pi - \arcsin x$

2) a) Två vektorer i planet:

$\bar{v}_1 = (1,3,0) \qquad \bar{v}_2 = (-1,1,1)$

$\bar{v}_2 \times \bar{v}_1 = (3,-1,4)$ och planets ekvation

$\underline{3x - y + 4z = 6}$

b) Linjens ekvation $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = at \\ z = 2-t \end{cases}$

Skärning:

$3(2t-1) - at + 4(2-t) = 6$

$(2-a)t + 5 = 6$ saknar lösning om $\underline{a=2}$

3)

Definierad om $|x| > \sqrt{3}$,

$$y' = 1 + \frac{2x}{x^2-3} = \frac{(x-1)(x+3)}{x^2-3}$$

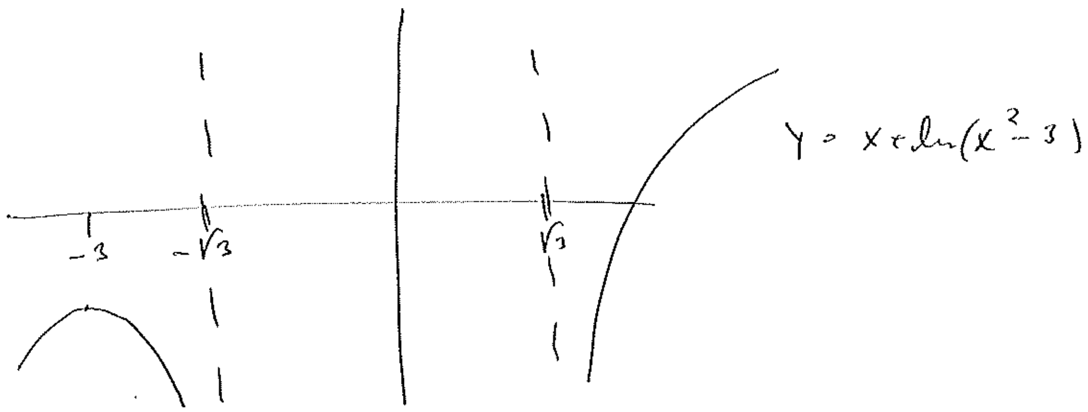
$y(-3) = -3 + \ln 6$	$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$
$x \uparrow -\sqrt{3} \Rightarrow y \to -\infty$	$x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$
$x \downarrow \sqrt{3} \Rightarrow y \to -\infty$	

4 Asymptoter: $x = \pm\sqrt{3}$, inga sneda

Teckenschema

x		-3		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
y'	$+++$	0	$---$	$\nexists$		$\nexists$	$++++$
y	$\nearrow$	$\ln 6-3$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$

Figur



(4)

$f(x)$ definierad om $x > 0$

$f(x) \to \infty$ om $x \to 0$ och $x \to \infty$

Största värde saknas

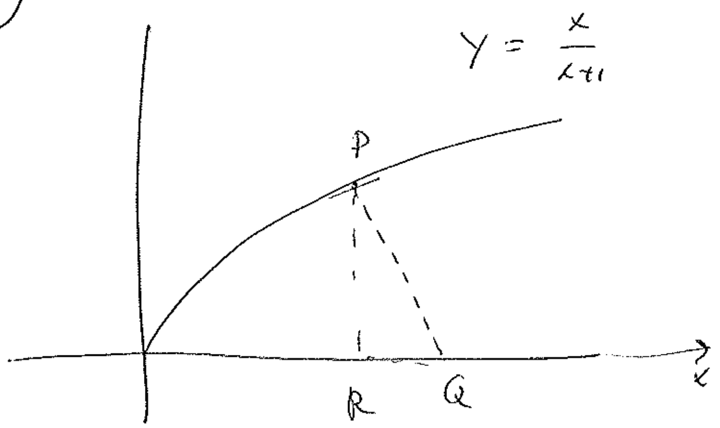
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{2x^2(1+x^2)} = 0$$

bara om $x = 1$

$f(x)$ har uppenbarligen ett minsta värde

i $x = 1$: $\quad f(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$

(5)



$P = (s, t)$ $\quad y' = \frac{1}{(x+1)^2}$ och $-\frac{1}{y'} = -(x+1)^2$

Normalens ekvation: $y - t = -(s+1)^2(x-s)$ där $t = \frac{s}{s+1}$

$y = 0 \Rightarrow x = s + \frac{t}{(s+1)^2} = s + \frac{s}{(s+1)^3}$

sätt $A(s) = \frac{s}{(s+1)^3} \cdot \frac{s}{(s+1)}$ där $A(s)$ är dubbla arean

Så $A(s) = \frac{s^2}{(s+1)^4}$, $s \geq 0$

Vi ser att $A(0) = 0$ $\quad A(s) \to 0$ då $s \to \infty$ och $A(s) \geq 0$

så $A(s)$ har ett maximum där $A'(s) = 0$

$$A'(s) = \frac{2s(s+1)^4 - 4s^2(s+1)^3}{(s+1)^8} = \frac{2s[s+1-2s]}{(s+1)^5} = \frac{2s(1-s)}{(s+1)^5}$$

som är $= 0$ i $s = 1$

Svar: välj $P = (1, \frac{1}{2})$

6

a) Sätt $f(x) = x^4 + 4x + c$ så att

$f'(x) = 4x^3 + 4 = 0$ om $x = -1$ och bara då

Ekvationen kan bara ha två reella rötter

FALSKT

b) Med $f(x) = 2x$ och $g(x) = x$

går $f(x) - g(x) \to \infty$ då $x \to \infty$

FALSKT

c) $|x-2| < \frac{\varepsilon}{19} < \frac{1}{19} \Rightarrow x < 3$

så $x^2 + 2x + 4 < 19$

$|x^3 - 8| = |x-2||x^2+2x+4| < \frac{\varepsilon}{19} \cdot 19 = \varepsilon$

SANT

7) a) b) se boken

c)

Enligt medelvärdessatsen finns

ett c, $-b \le c \le b$ så att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(-b)}{b - (-b)} = \frac{2f(b)}{2b} = \frac{f(b)}{b}$$

eftersom f är udda, $f(-x) = -f(x)$

(Även när $b = 0$ gäller påståendet

eftersom $f(0) = 0$)