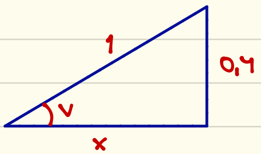
Lösningsförslag 2015-10-29

1a) $2\log_3 12 - \log_3 16 + \frac{1}{2}\log_3 9 = \log_3 12^2 - \log_3 16 + \log_3 9^{1/2} =$

$$= \log_3\left(\frac{(4\cdot 3)^2\cdot\sqrt{9}}{4\cdot 4}\right) = \log_3\left(\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot 3^2\cdot 3}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}}\right) = \log_3 3^3 = \underline{\underline{3}}$$

Svar: 3

1b) Eftersom $0 < \arcsin(0{,}4) < \frac{\pi}{2}$ kan vi tänka oss denna som vinkeln v i följande rätvinkliga triangel:



Pythagoras ger: $x = \sqrt{1-0{,}4^2} = \sqrt{1-\frac{16}{100}} = \frac{\sqrt{84}}{10}$

$$\Rightarrow v = \arccos\left(\frac{\sqrt{84}}{10}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(\arcsin(0{,}4)) = \cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{84}}{10}\right)\right) = \frac{\sqrt{84}}{10}$$

Svar: $\frac{\sqrt{84}}{10}$.

1c)

$$f(x) = |x|\cdot x^3 = \begin{cases} x^4, & x \geq 0 \\ -x^4, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \geq 0 \\ -4x^3, & x < 0 \end{cases}$$

Vet att $(f^{-1})'(-9/4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-9/4))}$ där $f^{-1}(-9/4) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ eftersom

$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 = -\frac{9}{4}$. Alltså får vi att

$$(f^{-1})'(-9/4) = \frac{1}{f'(-\sqrt{3/2})} = \frac{1}{-4(-\sqrt{3/2})^3} = \frac{1}{4\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

Svar: $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}$

1d, Vi ser direkt att vektorn $(1,2,a)$ är parallell med vektorn $(5,10,-1)$ bara då $a=-1/5$ (eftersom de då är skalningar av varandra). Kryssprod. mellan parallella vekt. är alltid noll!

Svar: $a=-1/5$.

1e, $f(x)=\arctan(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$.

Normallinjens lutning i $x=1$ är därför $k_N=-\frac{1}{1/2}=-2$.
Normallinjens ekv. kan därför beräknas som:

$$\frac{y-\arctan(1)}{x-1}=-2 \Leftrightarrow \underline{\underline{y=-2x+\left(\frac{\pi}{4}-1\right)}}$$

Svar: $y=-2x+\left(\frac{\pi}{4}-1\right)$.

1f, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \{\text{l'Hospital}\} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim\frac{\sin x}{x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Svar: $\frac{1}{2}$.

2a, Linjen ℓ's koordinater måste uppfylla planet Π's ekvation.
Direkt insättning ger:

$$2\cdot(1+t)+2\cdot(-t)+(-1+3t)=7$$
$$\Leftrightarrow$$
$$2+2t-2t-1+3t=7$$
$$\Leftrightarrow$$
$$3t=6 \Leftrightarrow t=2.$$

Skärningspunkten mellan ℓ och Π ges därför av
$$(x,y,z)=(1+2,-2,-1+3\cdot 2)=(3,-2,5).$$

<u>Svar:</u> $(3,-2,5)$

2b, Eftersom den sökta linjen ska vara vinkelrät mot ℓ och ligga i Π så kan riktningsvektorn beräknas genom kryssprodukten mellan ℓ's riktningsvektor $\mathbf{v}$ och Π's normalvektor $\mathbf{n}$.
Om vi kallar denna vektor $\mathbf{u}$ så gäller alltså att

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}\times\mathbf{n}=(1,-1,3)\times(2,2,1)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1-6,\ 6-1,\ 2-(-2))=(-7,5,4)$$

Eftersom skärningspunkten i a-uppgiften är en fixpunkt på linjen som vi söker kan vi skriva denna linjes ekv. som

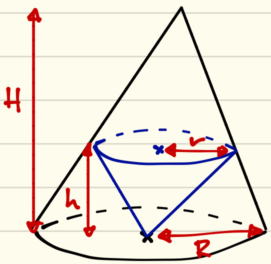
$$(3,-2,5)+t\cdot(-7,5,4)\ ,\ t\in\mathbb{R}$$

eller på parameterform som

$$\begin{cases} x = 3-7t \\ y = -2+5t \\ z = 5+4t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Svar: $(3,-2,5) + t\cdot(-7,5,4)$, $t \in \mathbb{R}$.

3, Börja med att rita en bild!



Vi vet att den lille konens volym kan skrivas som:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Vi kan hitta en relation mellan r och h genom likformighet:

$$\frac{H-h}{r} = \frac{H}{R} \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H-h)$$

och därmed har vi att

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2\cdot h.$$

Det är klart att $0 \leq h \leq H$ och att $V(0) = V(H) = 0$. Av detta följer att det måste finnas minst ett globalt maximum i intervallet $h \in (0,H)$. Vidare måste detta vara en kritisk punkt eftersom $V(h)$ saknar singulära punkter.

Beräkna derivatan!

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3H^2}\cdot(3h^2 - 4Hh + H^2) = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\left(h^2 - \frac{4}{3}Hh + \frac{H^2}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot h\cdot\left(h - \frac{H}{3}\right)$$

så kritiska punkter i $h=0$ och $h=\frac{H}{3}$. Eftersom $h=0$ utgör en ändpunkt är den ointressant. Finns således bara en global maxpunkt som antas då $h=\frac{H}{3}$.

$\square$

4, (i) Def. mängd given som $D_f = (0,\infty)$

(ii) Inga symmetrier av typ jämn/udda eftersom funktionen ej är def. för negativa x.

(iii) Skärningar

y-axeln: $f(0)$ ej def. så ingen skärning med y-axeln.

x-axeln: $y=0 \Rightarrow x^x = 0$ vilket är omöjligt då $x^x > 0$ för alla tal $x>0$.

(iv) Derivatan: kan beräknas genom att betrakta $\ln(x^x)$

$$\frac{d}{dx}(\ln x^x) = \{\text{kedjeregeln}\} = \frac{1}{x^x}\cdot\frac{d}{dx}(x^x) \text{ men det gäller också att}$$
$$\frac{d}{dx}(\ln x^x) = \frac{d}{dx}(x\cdot\ln x) = \{\text{prod. regeln}\} = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

och alltså gäller att $\frac{d}{dx}(x^x) = x^x\cdot(\ln x + 1)$. Kritiska punkter?

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^x\cdot(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0$ eftersom $x^x > 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Alltså <u>en</u> kritisk punkt i $x = 1/e$ där $f(1/e) = (1/e)^{1/e} = e^{-e^{-1}}$.

Teckenstudium:

x		$1/e$	
f	$\searrow$	$e^{-e^{-1}}$ min.	$\nearrow$
f'	$-$	0	$+$

eftersom $\ln x > -1$ för $x \in (e^{-1}, \infty)$

eftersom $\ln x < -1$ för $0 < x < e^{-1}$

(v) Horisontella asymptoter samt gränsv. då $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \text{"}\infty^\infty\text{"} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = ? \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} x^x(\ln x + 1) = ?$$

Studera först gränsvärdet för $\ln(x^x)$ då $x \to 0^+$!

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \{\text{log. vs. pol.}\} = 0$$

Men om $\ln(x^x) \longrightarrow 0$ då $x \to 0^+$ så måste $x^x \longrightarrow 1$ eftersom $\ln(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$. Alltså får vi:

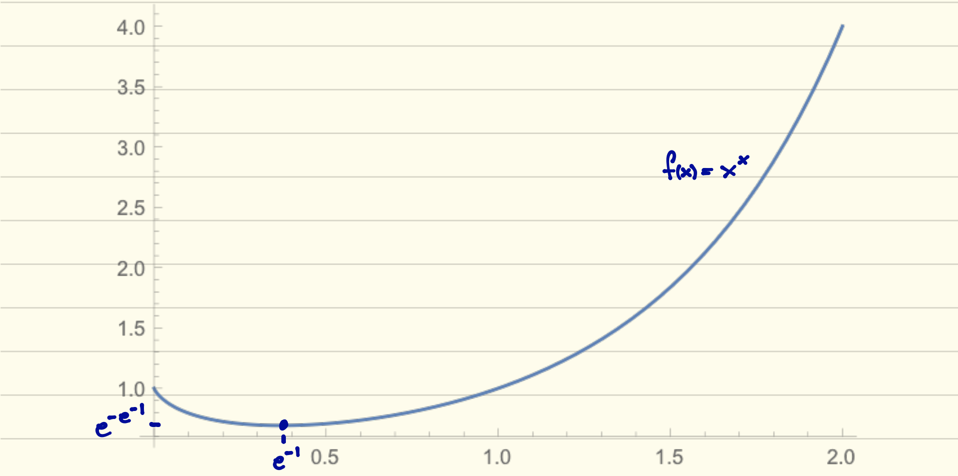
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} x^x(\ln x + 1) = \text{"}1 \cdot (-\infty)\text{"} = -\infty$$

Vertikala asymptoter finns ej eftersom f saknar singulära punkter.

(vi) Sneda asymptoter:

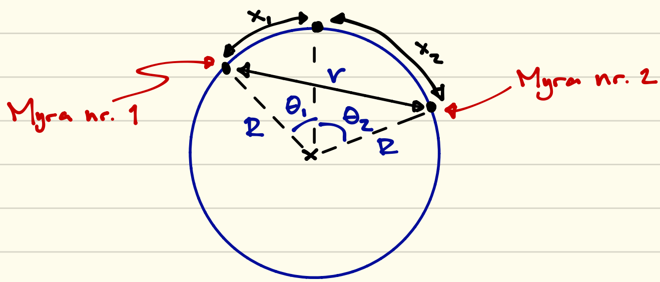
$$k_\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{x-1} = \text{"}\infty^{\infty-1}\text{"} = \infty$$

Alltså saknar f asymptot i oändligheten och växer obegränsat!
Med hjälp av teckentabellen samt gränsvärdesanalysen kan vi nu skissa grafen som:



□

5, Rita en bild!



Vet att: $x_1 + x_2 = \frac{\pi R}{3}$ och $x_1' + x_2' = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Söker: $\frac{dr}{dt}$ givet ovanstående.

Genom att anv. cosinussatsen på triangeln som bildas mellan myrorna och cirkelns medelpunkt får vi att:

$$r^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\theta_1+\theta_2) = 2R^2 - 2R^2\cos\left(\frac{x_1}{R}+\frac{x_2}{R}\right)$$

så

$$r = \sqrt{2}R\cdot\sqrt{1-\cos\left(\frac{x_1+x_2}{R}\right)}$$

Här är r, x_1 och x_2 alla funktioner av tiden t så m.h.a. kedjeregeln får vi att

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2}R\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\left(\frac{x_1+x_2}{R}\right)\right)^{-1/2}\cdot\sin\left(\frac{x_1+x_2}{R}\right)\cdot\left(\frac{x_1'+x_2'}{R}\right)$$

I den tidpunkt då $x_1+x_2=\frac{\pi R}{3}$ och $x_1'+x_2'=\sqrt{\frac{2}{3}}$ får vi då att

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2}\cancel{R}\frac{1}{2}\left(1-\cos(\pi/3)\right)^{-1/2}\cdot\sin(\pi/3)\cdot\frac{1}{\cancel{R}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{1}}$$

<u>Svar:</u> $\frac{dr}{dt}=1$.

6a, Två vektorer u och v är vinkelräta om och endast om det gäller att $u\cdot v=0$. I vårt fall är $u=(\cos x, \sin x, 1)$ och $v=(\cos x, \sin x, -1)$ och då är

$$u\cdot v = \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = \{\text{Trig. ettan}\} = 1-1=0$$

för <u>alla</u> $x\in\mathbb{R}$. Påst. är alltså <u>sant</u>!

b, Det är <u>inte</u> sant att $e^{\ln x}=x$ för alla $x\in\mathbb{R}$ eftersom $\ln(x)$ bara är def. för $x>0$.

6c, Påståendet är falskt! Enl. cosinussatsen gäller t.ex. att

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\theta$$

och om vinkeln θ är trubbig, dvs. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, så är $\cos\theta < 0$ och således är $a^2 = b^2 + c^2 \underbrace{- 2bc \cdot \cos\theta}_{>0} > a^2 + b^2$.

7a,

Definition: Med derivatan av en funktion f i en punkt $x = a$ menas gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

om detta existerar. Man skriver i så fall detta som $f'(a)$.

b, Använd derivatans definition på funktionen $f'(x)$!

Vi har att

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \{\text{Derivatans def.}\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h+h) - f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \quad \text{V.S.B.}$$

$\square$