Lösningar till MVE012 Inledande matemtik för I1, 16-10-27

1. (a) Från $|1-x^2| = 1$ får vi att $1-x^2 = \pm 1$, som ger de två ekvationerna $x^2 = 0$ och $x^2 = 2$.

   Svar: $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{2}$.

   (b) Det gäller att $v \in [-\pi/2, \pi/2]$ och att $\sin v = 3/5$. För en sådan vinkel är $\cos v > 0$ och med trigonometriska ettan är därför $\cos v = \sqrt{1-(3/5)^2} = 4/5$. Det ger i sin tur att $\tan v = \sin v / \cos v = 3/4$.

   Svar: $\cos v = 4/5$ och $\tan v = 3/4$.

   (c) Räkneregler för logaritmer ger (eftersom alla faktorer i kvoten är positiva när $x = 1$) att

$$f(x) \quad = \quad \ln e^x + \ln(1+x^3) - \ln(1+x^2) = x + \ln(1+x^3) - \ln(1+x^2).$$

   Deriveringsregel för sammansatta funktioner ger nu

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{3x^2}{1+x^3} - \frac{2x}{1+x^2}, \text{ så} \\ f'(1) &= 1 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

   Svar: $f'(1) = 3/2$.

   (d) Derivering enligt kvotregeln och trigonometriska identiteter ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x(\cos x + \sin x) - \sin x(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2} = \\ &= \frac{1}{1 + 2\cos x \sin x} = \frac{1}{1 + \sin 2x}. \end{aligned}$$

   Svar: $1/(1 + \sin 2x)$.

   (e) När $x = 0$ är täljare och nämnare båda $= 0$. Båda gränsvärdena är därför av typen "0/0", så vi kan använda l'Hospitals regel. Vi bildar en ny kvot genom att derivera täljare respektive nämnare och får (eftersom $Dx = 1$) enligt kedjeregeln

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

   När $x > 0$ är $Q = 0$ och har därmed gränsvärdet 0, när $x \to 0^+$.
   När $x < 0$ är $Q = 2/\sqrt{1-x^2}$, som har gränsvärdet 2 när $x \to 0^-$.
   Enligt l'Hospitals regel har $f(x)$ samma gränsvärden som Q.
   Svar: $f(x) \to 2$, när $x \to 0^-$ och $f(x) \to 0$, när $x \to 0^+$.

   (f) För kontinuitet krävs att $f(x)$ har gränsvärde när $x \to -2$ och att detta är $f(-2) = b$.
   När $x \neq -2$ gäller att

$$f(x) \quad = \quad \frac{x-3}{(x-1)(x+2)} + \frac{a}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x-3)(x+1) + a(x-1)}{(x^2-1)(x+2)}.$$

Eftersom täljaren är $= 0$ när $x = -2$ måste även täljaren vara det för att gränsvärde ska finnas när $x \to -2$. Det ger $5 - 3a = 0$ och $a = 5/3$. Med detta värde på a har vi

$$f(x) = \frac{x^2 - x/3 - 14/3}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{(x+2)(x-7/3)}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{x-7/3}{x^2-1}.$$

När $x \to -2$ gäller därför att $f(x) \to (-13/3)/3$. För kontinuetet ska alltså $b = -13/9$.

Svar: $a = 5/3$ och $b = -13/9$.

2. (a) Linjen består av alla lösningar till ekvationssytemet

$$\begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 3x - 5y + z = -11 \end{cases}$$

vars utökade koefficientmatris utsätts för radoperationer så att vi får (multiplicera rad 1 med -3 och lägg till andra raden)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 1 & -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

som ger lösningarna $z = t$, $y = -2 + 2t$, $x = -7 + 3t$. Löser vi ut t får vi att följande likheter ska gälla för att (x, y, z) ska ligga på linjen:

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+2}{2} = z.$$

Svar: $(x + 7)/3 = (y + 2)/2 = z$.

(b) Från räkningarna i a) kan vi utläsa att $\bar{u} = (3, 2, 1)$ är en riktningsvektor för linjen och att den går genom $P = (-7, -2, 0)$. Vektorn $\bar{v}$ från P till $(-6, 0, 2)$ har koordinaterna $\bar{v} = (1, 2, 2)$. En normal till sökta planet ska därför vara vinkelrät mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$. En sådan vektor ges av

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sökta planet har därför en ekvation av formen $2x - 5y + 4z = d$, men eftersom det går genom $(-6, 0, 2)$ ska $d = -4$.

Svar: $2x - 5y + 4z = -4$.

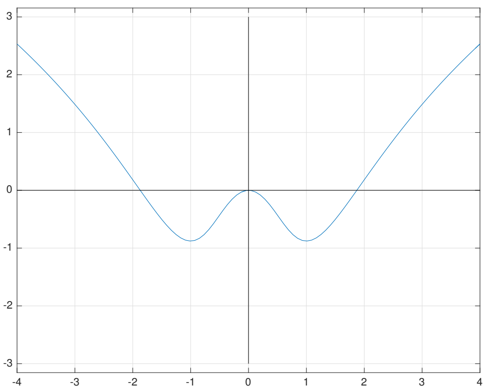
3. Eftersom $\ln t \to \infty$ och $\arctan t \to \pi/2$ när $t \to \infty$ gäller att $f(x) \to \infty$ när $x \to \pm\infty$. Funktionens definitionsmängd är alla reella tal.

Vi deriverar för att avgöra växande respektive avtagande och har

$$f'(x) = \frac{4x^3}{1+x^4} - \frac{4x}{1+(x^2)^2} = \frac{4x(x-1)(x+1)}{1+x^4}$$

Vi ser att vi har teckenväxlingar i -1, 0 och 1. Detta ger att $f(x)$ är strängt växande på $[-1, 0] \cup [1, \infty)$ och strängt avtagande på $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$.

Vi har $f(-1) = \ln 2 - \pi/2 < 1 - \pi/2 < 0$, $f(0) = 0$ (Heureka!) och $f(1) = f(-1) < 0$. Detta ger följande skiss



Vi ser att funktionen har tre nollställen.

Svar: 3 nollställen.

4. Det gäller att $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, så funktionens definitionsmängd är $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$.

   Vidare gäller att

$$f(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{när} \quad x \to -3^- \\ \infty & \text{när} \quad x \to -3^+ \end{cases} \quad \text{samt } f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{när} \quad x \to 2^- \\ -\infty & \text{när} \quad x \to 2^+ \end{cases}$$

   Alltså är linjerna $x = -3$ och $x = 2$ lodräta asymptoter.

   Vi har också att $f(x) \to 0$ när $x \to \pm\infty$, så $y = 0$ är vågrät asymptot i $\pm\infty$.

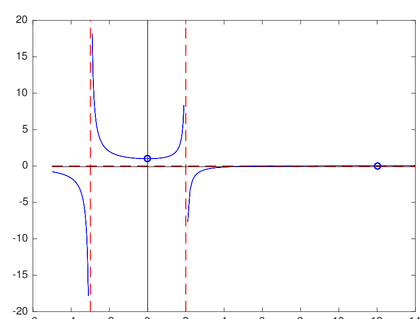
   Vi deriverar för att avgöra växande respektive avtagande:

$$f'(x) = \frac{(x^2+x-6)-(x-6)(2x+1)}{(x-2)^2(x+3)^2} = \frac{-x^2+12x}{(x-2)^2(x+3)^2} = \frac{-x(x-12)}{(x-2)^2(x+3)^2}.$$

   Vi har teckenväxling i $x = 0$ och $x = 12$. Tar vi höjd för definitionsmängden ger det att $f(x)$ är strängt avtagande på $(-\infty, -3) \cup (-3, 0] \cup [12, \infty)$ och strängt växande på $[0, 2) \cup (2, 12]$.

   Detta ger att vi ha lokalt minimum i $x = 0$ och lokalt maximum i $x = 12$. Vi har $f(0) = 1$ och $f(12) = 6/(144+6) = 1/25$.

   Det som gjorts kan sammanfattas i figuren:



Värdemängden är $(-\infty, 1/25] \cup [1, \infty)$.

Svar: Definitionsmängden är $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$ och värdemängden $(-\infty, 1/25] \cup [1, \infty)$. Grafen har de lodräta asymptoterna $x = -3$ och $x = 2$, samt den vågräta $y = 0$. Funktionen är strängt avtagande på $(-\infty, -3) \cup (-3, 0] \cup [12, \infty)$ och strängt växande på $[0, 2) \cup (2, 12]$. Den har lokalt minimum i $x = 0$ coh lokalt maximum i $x = 12$. Största och minsta värden saknas.

5. Låt r vara basens radie i lilla konen och R den i den stora. Likformighet ger $R/r = H/(H-h)$, så stora konens volym kan skrivas $V(H) = (\pi/3)r^2H^3/(H-h)^2 = (v/h)H^3/(H-h)^2$, där $H \in (h, \infty)$.

   Derivering (med avseende på H) ger

$$\begin{aligned} V'(H) &= (v/h)\frac{3H^2(H-h)^2 - 2H^3(H-h)}{(H-h)^4} = (v/h)\frac{3H^2(H-h) - 2H^3}{(H-h)^3} = \\ &= (v/h)\frac{H^2(H-3h)}{(H-h)^3}. \end{aligned}$$

   Vi har teckenväxling i $3h$ i intervallet (h, ∞) och funktionen avtar på $(h, 3h]$, medan den växer på $[3h, \infty)$. Det gör att stora konens minsta möjliga volym är $V(3h) = (v/h)(27h/4) = 27v/4$.

   Svar: $27v/4$.

6. (a) **Detta är falskt.** Funktionen $f(x) = e^{-x}$ är strängt avtagande och konvex ($f'(x) = -e^{-x} < 0$, $f''(x) = e^{-x} > 0$.

   (b) Eftersom f är kontinuerlig på $[x, 2x]$ och deriverbar på $(x, 2x)$ ger medelvärdessatsen ett $c_x \in (x, 2x)$ så att

$$Q = \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \frac{(2x - x)f'(c_x)}{x} = f'(c_x).$$

   När $x \to \infty$ gäller att $x < c_x \to \infty$. Eftersom $f'(x) \to k$ när $x \to \infty$ gäller samma sak för Q. **Påståendet är sant.**

   (c) Tangenten till grafen i punkten $(a, f(a)$ har ekvationen $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, som i detta fall blir

$$y = (e^a - e^{-a})(x - a) + e^a + e^{-a}$$

   Eftersom den ska gå genom $(0, 1)$ får vi ekvationen $1 = (e^a - e^{-a})(-a) + e^a + e^{-a}$. Påstående är sant om den har en lösning.

   För att avgöra detta kollar vi på funktionen som står i högerledet
   $g(a) = e^a(1-a) + e^{-a}(1+a)$ och avgör värdemängden.

   Vi har $g(a) \to -\infty$ när $a \to \pm\infty$ och $g'(a) = -a(e^a + e^{-a})$. Det ger att g är strängt växande på $(\infty, 0]$ och strängt avtagande på $[0, \infty)$. Funktionens största värde är alltså $g(0) = 1 + 1 = 2$. Alltså är värdemängden $(-\infty, 2]$ och ekvationen $1 = g(a)$ har (två) lösningar. **Påståendet är sant.**