Lösningar till MVE012 Inledande matematik för I1 17-08-23

1. (a) Faktorisering ger

$$p(x) = (x-1)(x^2+3x+2) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

Polynomet har teckenväxlingar (och nollställen) i -2, -1 och 1. Det gör att lösningarna til $p(x) > 0$ ges av alla x i $(-2,-1) \cup (1,\infty)$.

Svar: Alla x i $(-2,-1) \cup (1,\infty)$.

(b) Funktionen är definierad för alla reella tal x. Derivering enligt kvotregeln ger $f'(x) = (x^2+9-2x(x+4))/(x^2+9)^2$, dvs $f'(x) = -(x^2+8x-9)/(x^2+9)^2 = -(x-1)(x+9)/(x^2+9)^2$. Nämnaren är alltid $\geq 9^2$, så teckenväxlingar kommer från täljaren, som är positiv på $(-9,1)$ och negativ annars. Det ger att $f(x)$ är växande på $(-9,1)$ och avtagande annars. Vi har ett därför ett lokalt maximum i $x=1$, och eftersom $f(x) \to 0$, när $x \to -\infty$, är $f(1) = 5/10 = 1/2$ funktionens största värde.

Svar: 1/2.

(c) Deriviering enligt produktregeln och kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln(x^2+1) + \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{2x}{x^2+1}. \\ f'(1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}(1+\ln\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Svar: $\sqrt{2}(1+\ln(2)/2)$.

(d) Med $v = \arctan 8$, gäller $\tan^2 v = 8^2 = 64$, och $\tan^2 v = \sin^2 v/\cos^2 v = \sin^2 v/(1-\sin^2 v)$, som ger $65\sin^2 v = 64$. Vi har alltså $\sin v = \pm 8/\sqrt{65}$, men eftersom $v = \arctan 8$ ligger i första kvadranten gäller $\sin v = 8/\sqrt{65}$.

Svar: $\sin v = 8/\sqrt{65}$.

(e) i. Förlängning med konjugerat uttryck ger $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x = x/(\sqrt{x^2+1}+x)$. Förkortning med x ger $f(x) = 1/(\sqrt{1+1/x}+1) \to 1/(\sqrt{1+0}+1) = 1/2$, när $x \to \infty$.

Svar: 1/2.

ii. Sätt $Q = (e^{2x^2}-1)/(x\sin x)$, som ger ett gränsvärde av typen "0/0" när $x \to 0$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger $Q_1 = 4xe^{2x^2}/(\sin x + x\cos x)$. Division med x ger $Q_1 = 4e^{2x^2}/(\sin x/x + \cos x) \to 4/(1+1) = 2$, när $x \to 0$. Enligt l'Hospitals regel gäller även att $Q \to 2$, när $x \to 0$.

Svar: 2.

(f) Vi uppfattar y som en funktion och deriverar båda sidor i ekvationen med avseende på x. Det ger $3yy'x + y^3 + y'x^4 + y \cdot 4x^3 = 0$. Insättning av $x = 1$ och $y = 1$ (från given punkt $(1,1)$) ger $3y' + 1 + y' + 4 = 0$, eller $y' = -5/4$. Tangenten har alltså riktningskoefficienten $-5/4$ och går genom $(1,1)$. Det ger ekvationen $y = -(5/4)(x-1) + 1$.

Svar: $y = -(5/4)(x-1) + 1$ (eller $y = -5x/4 + 9/4$.)

2. (a) Vi söker riktningsvektor för linjen och punkt på den. Vi sätter $t = (x-1)/2 = (y+2)/3 = (3-z)/4$ och får $x = 1+2t$, $y = -2+3t$, $z = 3-4t$. En riktningsvektor för linjen ges därför av $\bar{v} = (2,3,-4)$, medan $P = (1,-2,3)$ är en punkt på den. Vektorn $\bar{v}$, liksom vektorn $\bar{u}$ mellan P och $(5,1,1)$, är vektorer i planet. Vi har $\bar{u} = (4,3,-2)$. En normal till planet ges därför av

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi väljer normalen $(1,-2,-1)$ och planets ekvation blir $x - 2y - z = d$, men eftersom det går genom $(5,1,1)$ gäller $d = 5 - 2 - 1 = 2$.

Svar: $x - 2y - z = 2$.

(b) Om d är avståndet mellan $Q = (5,1,1)$ och linjen, så har parallellogrammen som $\bar{u}$ och $\bar{v}$ spänner ut arean $|\bar{u} \times \bar{v}| = 6\sqrt{1+4+1} = 6\sqrt{6}$, men också $d \cdot |\bar{v}|$, så avståndet blir

$$d = \frac{6\sqrt{6}}{|\bar{v}|} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{4+9+16}}.$$

Svar: $6\sqrt{6/29}$.

3. Definitionsmängden är $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

När $x \to -1$ gäller att $(1+x^2)/|1+x| \to 0^+$, så $f(x) \to -\infty$, när $x \to -1$. Det ger den lodräta asymptoten $x = -1$.

Vi har $f(x)/x = \ln(1+x^2)/x - \ln|x+1|/x - \arctan(x)/x \to 0$, när $x \to \pm\infty$, enligt kända gränsvärden.

Vi har $f(x) - 0 \cdot x = f(x) \to \infty$, när $x \to \pm\infty$, eftersom $(x^2+1)/|x+1| \to \infty$ och $\arctan x \to \pm\pi/2$ då.

Sneda och vågräta asymptoter saknas därför.

Derivering av $f(x) = \ln(x^2+1) - \ln(|x+1|) - \arctan x$ ger

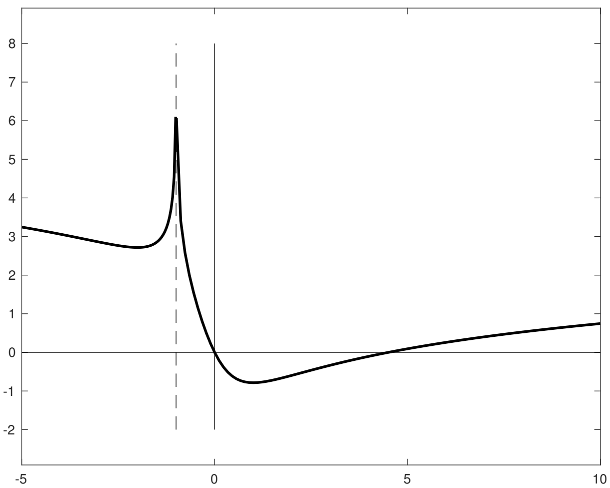
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x-1}{1+x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)(1+x^2)} = \\ &= \frac{x^2+x-2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

vilket ger att vi har teckenväxlingar i -2, -1 och 1. Det ger att f' är positv på $(-2,-1) \cup (1,\infty)$ och negativ eller 0 annars.

Det betyder att f är strängt växande på $[-2,-1) \cup [1,\infty)$, och strängt avtagande på $(-\infty,-2] \cup (-1,1]$.

Vi har ett lokalt minimum när $x=-2$ och när $x=1$. Vi har $f(-2)=\ln(5)+\arctan 2 > 0$ och $f(1) = -\arctan 1 = -\pi/4 < 0$. Eftersom $f(x) \to \infty$, när $x \to \pm\infty$ och när $x \to -1$, ger detta att funktionens minsta värde är $-\pi/4$, medan största värde saknas.

Vi sammanfattar i en figur



Svar: Definitionsmängden är $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$. Värdemängden är $(-\pi/4,\infty)$. Enda asymptoten är $x=-1$. Funktionen har lokala minima när $x=-2$ och när $x=1$, där också minsta värdet $-\pi/4$ antas. Funktionen är stängt växande på $[-2,-1)\cup[1,\infty)$ och strängt avtagande på $(-\infty,-2]\cup(-1,2]$.

4. Enligt definition är $f'(0)=\lim_{x\to 0}(f(x)-f(0))/x$, om gränsvärdet existerar. Vi sätter $Q=(f(x)-f(0))/x$. Enligt definition är $f(0)=\cos\sqrt{0}=1$.

   När $x>0$ gäller att

$$Q \quad = \quad \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$$

   som är ett gränsvärde av typen “0/0” när $x\to 0$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$Q_1 \quad = \quad \frac{-\sin(\sqrt{x})/(2\sqrt{x})}{1} = \left\{t=\sqrt{x}\right\} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t}{t} \to -\frac{1}{2}\cdot 1,$$

   när $t\to 0$, dvs när $x\to 0^+$. Enligt l’Hospitals regel gäller även

$$Q \to -\frac{1}{2},$$

   när $x\to 0^+$.

   När $x<0$ gäller

$$Q \quad = \quad \frac{b(e^{a\sqrt{-x}}+e^{-a\sqrt{-x}})-1}{x}.$$

Eftersom nämnaren $\to 0$, när $x \to 0^-$, måste samma sak gälla täljaren för att gränsvärde ska finnas. Det ger $2b - 1 = 0$, dvs $b = 1/2$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$Q_1 = \frac{ab(e^{a\sqrt{-x}} - e^{-a\sqrt{-x}})/(-2\sqrt{-x})}{1} = \left\{t = \sqrt{-x}\right\} = -\frac{a}{4} \cdot \frac{e^{at} - e^{-at}}{t}$$

som är ett gränsvärde av typ "0/0" när $t \to 0$, dvs när $x \to 0^-$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$Q_2 = -\frac{a^2}{4} \cdot \frac{e^{at} + e^{-at}}{1} \to -\frac{a^2}{4} \cdot \frac{2}{1} = -\frac{a^2}{2}.$$

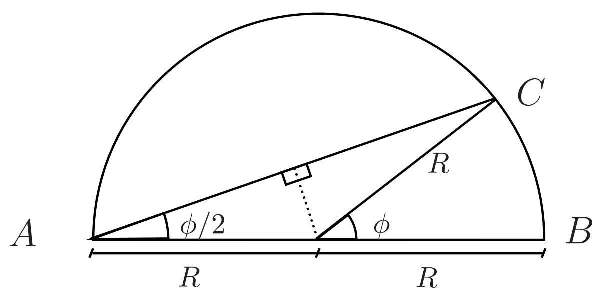
Enligt l'Hospitals regel gäller även

$$Q \to -\frac{a^2}{2},$$

när $x \to 0^-$. Vi ska alltså ha $a^2 = 1$, vilket ger $a = \pm 1$. Båda värdena ger samma funktion så vi kan välja $a = 1$.

Svar: $a = 1$ (eller $a = -1$) och $b = 1/2$.

5. Låt R vara sjöns radie och v den hastighet med vilken Lisbeth kan springa längs stranden. Hon paddlar då med hastigheten $v/2$. Inför vinkeln ϕ som i figuren



Sträckan AC har längden $2R\cos(\phi/2)$ och bågen BC har längden $R\phi$.

Låt $f(\phi)$ vara tiden det tar för Lisbeth att färdas den samanlagda vägen mellan A och B via C. Vi har då

$$f(\phi) = \frac{4R}{v} \cdot \cos(\phi/2) + \frac{R}{v} \cdot \phi = \frac{R}{v}\Big(4\cos(\phi/2) + \phi\Big),$$

där $0 \le \phi \le \pi$. Derivering ger $f'(\phi) = (R/v)(-2\sin(\phi/2) + 1)$, som är positivt när $0 < \phi < \pi/3$ och negativt när $\pi/3 < \phi < \pi$. Det ger att $f(\phi)$ har maximum i $\pi/3$ och minimum i 0 eller π.

Vi har $f(0) = 4R/v$ och $f(\pi) = \pi R/v$, så minsta värdet är $f(\pi)$, då Lisbeth springer hela vägen.

Svar: Snabbast går det om Lisbeth springer hela vägen. Längst tid tar det om hon paddlar till punkten C på stranden sån att vinkeln mellan B, sjöns mittpunkt och C är $\pi/3$.

6. (a) Vi har

$$\bar{u} \cdot \left(\bar{v} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{|\bar{u}|^2}\,\bar{u}\right) = \bar{u} \cdot \bar{v} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{|\bar{u}|^2}\,\bar{u} \cdot \bar{u} = \left\{|\bar{u}|^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}\right\} = \bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{u} = 0.$$

Allstå är påståendet SANT.

(b) Att f är udda betyder att $f(-x) = -f(x)$ för alla x. Vi deriverar och får $-f'(-x) = -f'(x)$, för alla x, dvs $f'(-x) = f(x)$. Alltså är $f'(x)$ en jämn funktion. Påståendet är SANT.

(c) Om man sätter

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{när} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{när} \quad x = 0 \end{cases}$$

så gäller att $(f(x) - f(0))/x = x\sin(1/x) = x\sin(1/x) \to 0$, när $x \to 0$, enligt instängningen $-|x| \leq |x\sin(1/x)| \leq |x|$. Detta visar att $f(x)$ är deriverbar i $x = 0$, och att $f'(0) = 0$.

För $x \neq 0$ gäller enligt produkt- och kedjeregeln att $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$, som saknar gränsvärde när $x \to 0$, eftersom vinkeln $1/x$ i cosinus då går mot $\pm\infty$.

Påståendet är alltså FALSKT.

7. (a) Funktionen f är strängt avtagande på intervallet I om det för varje val av punkter $x_1 < x_2$ i I gäller att $f(x_1) < f(x_2)$.

(b) Antag att $f'(x) < 0$ på I och att $x_1 < x_2$ är ett val av två punkter i I. Enligt medelvärdessatsen finns då ett c i intervallet $(x_1,\, x_2)$ (som är innehållet i I) så att $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Enligt förutsättning är $f'(c) < 0$ och $x_2 - x_1 > 0$. Detta ger att $f'(c)(x_2 - x_1) < 0$, så $f(x_2) - f(x_1) < 0$, dvs $f(x_1) > f(x_2)$ och därmed är f avtagande på I.