Lösningar till MVE012 Inledande matematik för I 17-12-20

1. (a) Kvadratkomplettering ger $|(x-2)^2-1| < 3$, eller $-3 < (x-2)^2-1 < 3$, dvs $-2 < (x-2)^2 < 4$. Den första olikheten gäller alltid, så detta är det samma som $(x-2)^2 < 4$, eller $x(x-4) < 0$, vilket gäller när $0 < x < 4$.

   Svar: För de x för vilka $0 < x < 4$.

   (b) Vi har att $f(x) \to 1$, när $x \to \pm\infty$, så $y = 1$ är en asymptot i $\pm\infty$. Vi har också att $f(x) = x^2/((x-1)(x+3))$, vilket ger att $f(x) \to \infty$, när $x \to -3^-$ och $f(x) \to \infty$, när $x \to 1^+$, vilket ger att $x = -3$ och $x = 1$ är (lodräta) asymptoter.

   Svar: $y = 1$, $x = -3$ och $x = 1$.

   (c) Kvot- och kedjereglerna ger $g'(x) = (f(x)^2+1-2xf(x)f'(x))/(f(x)^2+1)^2$. Detta ger $g'(1) = (1+1+2\cdot 5)/(1+1)^2 = 3$.

   Svar: 3.

   (d) Funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[0,2]$ och antar därför enligt max-min-satsen ett största och ett minsta värdet. De inträffar när x är nån av ändpunkterna eller en kritisk punkt. Vi har $f'(x) = 6x^2+6x-12 = 6(x^2+x-2) = 6(x-1)(x+2)$. Detta ger de kritiska punkterna $x = 1$ och $x = -2$. Bara $x = 1$ av dessa ligger i intervallet. Vi beräknar $f(0) = 1$, $f(1) = -6$, och $f(2) = 5$.

   Svar: Största värdet är 5 och minsta är -6.

   (e) Med $\alpha = \arcsin(-\sqrt{6}/3)$ och $\beta = \arcsin(1/3)$ har vi att α och β är vinklar i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ (där cosinus inte är negativ), att $\sin\alpha = -\sqrt{6}/3$, och $\cos\alpha = \sqrt{1-(-\sqrt{6}/3)^2} = \sqrt{3}/3$, samt $\sin\beta = 1/3$ och $\cos\beta = \sqrt{1-(1/3)^2} = \sqrt{8}/3$.
   Additionsformeln ger

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sqrt{3}/9 - 4\sqrt{3}/9 = -\sqrt{3}/3.$$

   Svar: $-\sqrt{3}/3$.

   (f) Uttrycket är av typen ”0/0” oavsett vad a är, när $x \to 0$. Derivering av täljare och nämnare separat ger kvoten

$$Q_1 = \frac{a-2/(1+4x^2)}{2\cos 2x - 2}.$$

   Här har nämnaren gränsvärdet 0, när $x \to 0$, så för att ett (egentligt) gränsvärde ska finnas måste även täljare ha detta gränsvärde då. Det ger $a = 2$. Omskrivning av Q_1 ger nu

$$Q_1 = \frac{4x^2}{(\cos 2x - 1)(1+4x^2)}.$$

   Derivering av täljare och nämnare för sig ger nu

$$Q_2 = \frac{8x}{-2\sin 2x(1+4x^2) + (\cos 2x - 1)\cdot 8x} = \frac{2}{-\frac{\sin 2x}{2x}(1+4x^2) + 2(\cos 2x - 1)} \to -2,$$

   när $x \to 0$. l’Hospitals regel ger att den ursprungliga kvoten har samma gränsvärde.

   Svar: $a = 2$ och gränsvärdet blir -2.

2. (a) Vi bestämmer en parametrisering av linjen i planet genom att sätta t lika med de tre kvatiteterna och lösa ut variablerna:

$$t = \frac{3-x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$$

som ger

$$\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+3t \\ z = 1+2t \end{cases}$$

Detta ger att $(3,1,1)$ är en punkt i planet liksom vektorn med koordinater som står tillsammans med t. En annan så vektor ges av den till planet givna parallella linjen. Kryssprodukten av dessa ges av

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-6 \\ -(-10-8) \\ -6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ -18 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$1/9$ av den sista vektor är alltså en normal till planet, som därför har ekvationen $x+2y-2z=d$. Planet går genom P, vilket ger $3+2-2=d$.

Svar: $x+2y-2z=3$.

(b) Efersom planet i a) innehåller den ena linjen och är parallellt med den andra, är avståndet mellan linjerna det samma som avståndet mellan planet och en godtycklig punkt på linjen utanför planet. En sådan ges av $(5,3,1)$. Avståndsformel ger att avståndet är

$$\frac{|1\cdot 5 + 2\cdot 3 - 2\cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 6/3 = 2.$$

Svar: 2.

3. Kvadraten på avståndet mellan punkten (x,x^2) på kurvan och punkten $(1,1/2)$ ges av

$$f(x) = (x-1)^2 + (x^2-1/2)^2.$$

Vi söker x som minimerar $f(x)$. Vi har att $f(x)\to\infty$, när $x\to\pm\infty$. Derivering ger $f'(x) = 2(x-1)+4x(x^2-1/2) = 4x^3-2$, som är negativt när $x<2^{-1/3}$ och positivt när $x>2^{-1/3}$. Det ger att $f(x)$ har sitt minimum när $x=2^{-1/3}$. Den sökta punkten är därför $(2^{-1/3},2^{-2/3})$.

Svar: $(2^{-1/3},2^{-2/3})$.

4. Funktionern är definierad när $x\neq\pm\sqrt{3}$.

Eftersom $f(x)-(x+2)\to 0$, när $x\to\pm\infty$, gäller att $y=x+2$ är en asypmtot till $f(x)$ i $\pm\infty$. Vidare gäller att

$$\begin{aligned} f(x) &\to -\infty, && \text{när } x\to -\sqrt{3}^- \\ f(x) &\to \infty, && \text{när } x\to -\sqrt{3}^+ \\ f(x) &\to -\infty, && \text{när } x\to \sqrt{3}^- \\ f(x) &\to \infty, && \text{när } x\to \sqrt{3}^+. \end{aligned}$$

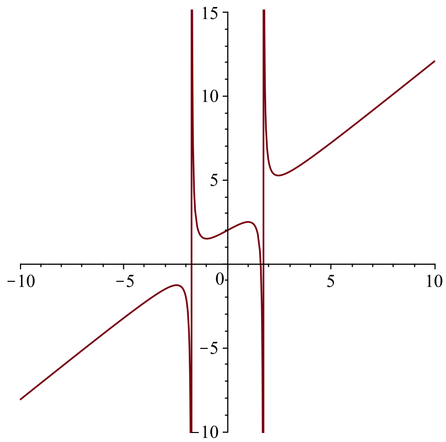
Detta ger att $x=\pm\sqrt{3}$ är två lodräta asymptoter. Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1+\frac{(x^2-3)-2x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{(x^2-3)^2-(x^2+3)}{(x^2-3)^2} = \frac{x^4-7x^2+6}{(x^2-3)^2} = \\ &= \frac{(x^2-1)(x^2-6)}{(x^2-3)^2} = \frac{(x+\sqrt{6})(x+1)(x-1)(x+\sqrt{6})}{(x^2-3)^2}. \end{aligned}$$

Teckenstudium ger att $f'(x)$ är positiv på $(-\infty,-\sqrt{6})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{6},\infty)$ och negativ på $(-\sqrt{6},-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\sqrt{6})$. Detta ger att $f(x)$ är strängt växande på $(-\infty,-\sqrt{6}]\cup[-1,1)]\cup[\sqrt{6},\infty)$ och strängt avtagande på $[-\sqrt{6},-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\sqrt{6}]$. Vi har därmed lokala minima i -1 och $\sqrt{6}$, samt lokala maxima i $-\sqrt{6}$ och 1. Vi beräknar

$$\begin{aligned}
f(-\sqrt{6}) &= -\sqrt{6}+2-\sqrt{6}/3 = 2-4\sqrt{6}/3 < 0\\
f(-1) &= 1+1/2 = 3/2\\
f(1) &= 3-1/2 = 5/2\\
f(\sqrt{6}) &= 2+\sqrt{6}+\sqrt{6}/3 = 2+4\sqrt{6}/3.
\end{aligned}$$

Informationen ovan samlas i följande skiss



Svar: Defintionsmängden ges av $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$. Asymptoterna är $y=x+2$, samt $x=\pm\sqrt{3}$. Funktionen är strängt växande på $(-\infty,-\sqrt{6}]\cup[-1,1)]\cup[\sqrt{6},\infty)$ och strängt avtagande på $[-\sqrt{6},-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\sqrt{6}]$. Lokala min-punkter äri -1 och $\sqrt{6}$, och lokala max-punkter är $-\sqrt{6}$ och 1. Värdemängden är $(-\infty,\infty)$.

5. Vi sätter

$$f(x) = 2\ln\left(\frac{x^2+1}{|x|}\right)+\frac{5x}{x^2+1} = 2\ln\left|\frac{x^2+1}{x}\right|+\frac{5x}{x^2+1}.$$

Funktionen är definierad när $x\neq 0$. Vi har att $f(x)\to\infty$, när $x\to\pm\infty$, samt $f(x)\to\infty$ när $x\to 0$.

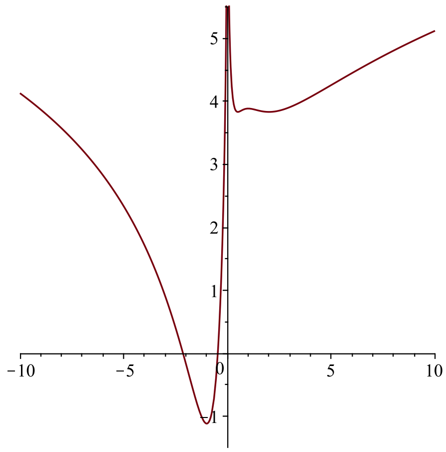
Derivering ger

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\cdot\frac{x}{x^2+1}\frac{2x^2-(x^2+1)}{x^2}+\frac{5(x^2+1)-10x^2}{(x^2+1)^2} =\\
&= \frac{2(x^2-1)(x^2+1)-5x(x^2-1)}{x(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)(2x^2-5x+2)}{x(x^2+1)^2} =\\
&= \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(2x-1)}{x(x^2+1)^2},
\end{aligned}$$

som har teckenväxlingar i -1, 0, $1/2$, 1, samt 2. Vi har lokala min-punkter i -1, $1/2$, och 2 och

$$\begin{aligned}
f(-1) &= 2\ln 2-5/2 < 0\\
f(1/2) &= 2\ln(5/2)+2\\
f(2) &= 2\ln(5/2)+2.
\end{aligned}$$

Vi har lokala max-punkt i 1 och $f(1) = 2\ln 2 + 5/2$. Vi sammanfattar i en skiss av grafen:



Vi ser av den och kalkylerna att det finns sex lösningar till ekvationen $f(x) = a$, precis när $2\ln(5/2) + 2 < a < 2\ln 2 + 5/2$.

Svar: När $2\ln(5/2) + 2 < a < \ln 2 + 5/2$.

6. (a) Fuktionen $f(x)-g(x)$ har derivatan 0 på det inre. Eftersom f och g är kontinuerliga gäller att $f(x)-g(x)$ är konstant på $[a, b]$. Att $f(a) = g(a)$ ger att konstanten är 0, så $f(b) - g(b) = 0$.

   Svar: Påståendet stämmer.

   (b) Funktion $f(x) = \tan x$ är kontinuerlig på $(-\pi/2, \pi/2)$ men saknar största värde på intervallet.

   Svar: Påståendet stämmer inte.

   (c) För funktionen $f(x) = \ln x$, gäller att $f'(x) = 1/x \to 0$, när $x \to \infty$, men $f(x)$ saknar asymptot i ∞.

   Svar: Påståendet stämmer inte.