Tentamen i Inledande matematik för E1, V1/AT1, Z1 2008-01-18

1. Till denna uppgift ska du **ENDAST LÄMNA IN SVAR**, alltså utan motiveringar. Här ges dock korta lösningar.

a) Ange alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = 5 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

Systemet överförs genom elementära radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Detta ger lösningarna (oändligt många):

Svar:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

b) För vilka reella tal x är olikheten $|5 - x^2| < 4$ sann?

Avståndet på tallinjen mellan x^2 och 5 ska vara mindre än 4. Det ger $1 < x^2 < 9$, vilket motsvarar

Svar: $-3 < x < -1,\ 1 < x < 3$

c) Funktionen $f(x) = e^x + \ln x$ $(x > 0)$ är inverterbar. Beräkna $(f^{-1})'(e)$.

Vi observerar att $f(1) = e$, $f'(1) = e + 1$. För derivatan gäller nu: $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)}$.

Svar: $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{e+1}$

d) Luft pumpas in i en sfärisk ballong med hastigheten $3\ m^3/s$.
Hur snabbt växer ballongens diameter i det ögonblick då diametern är en meter.

Med r = radien, D = diametern, V = volymen gäller $V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi D^3}{6}$. Dessa variabler är här funktioner av tiden t, och vi kan derivera sambandet med avseende på t (kedjeregeln):
$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{2} D^2 \frac{dD}{dt}$. Känt: $\frac{dV}{dt} = 3$, $D = 1$, sätt in och lös ut $\frac{dD}{dt} = \frac{6}{\pi}$.

Svar: Diametern växer med $\frac{6}{\pi}$ m/s.

e) Ange följande gränsvärden:

i. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

ii. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)}$

iii. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

i) $\frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}(x+1) \to 1 \cdot 2 = 2$ då $x \to 1$.

ii) $\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)} = \frac{\ln x^2(1+x^{-2})}{\ln x^3(1+x^{-3})} = \frac{2\ln x + \ln(1+x^{-2})}{3\ln x + \ln(1+x^{-3})} = \frac{2 + \frac{\ln(1+x^{-2})}{\ln x}}{3 + \frac{\ln(1+x^{-3})}{\ln x}} \to \frac{2}{3}$ då $x \to \infty$.

iii) $\frac{e^{2x} - e^x}{x} = e^x \frac{e^x - 1}{x} \to e^0 \cdot 1 = 1$ då $x \to 0$.

Svar: a) 2 b) $\frac{2}{3}$ c) 1

f) Ange alla komplexa tal z sådan att $\text{Im}(z) > 0$ och $z^6 = -1$.

Med $z = re^{i\theta}$ får vi ekvationen i polär form: $r^6 e^{i6\theta} = 1 \cdot e^{i\pi}$. Vi får $r = 1$, $6\theta = \pi + 2k\pi$, och lösningarna blir $z = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. De lösningar som har $\text{Im}(z) > 0$ svarar mot $k = 0, 1, 2$. Med $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ får vi:

Svar: $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, i, $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,3)$ och $C = (-1,0,3)$.

a) Beräkna arean av triangeln med hörn i A, B och C.

b) Beräkna avståndet från C till linjen genom A och B.

c) Beräkna avståndet från punkten $D = (3,3,3)$ till triangelns plan.

d) Ange ekvationen för linjen genom A och B i parameterform.

---

a) Arean är $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}|(1,2,2) \times (-2,-1,2)| = \frac{1}{2}|(6,-6,3)| = \frac{3}{2}|(2,-2,1)| = 4,5$

b) Avståndet är längden av ortogonalprojektionen av $\vec{AC}$ på sidan AB, dvs $\dfrac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|} = 3$

c) Avståndet är längden av ortogonalprojektionen av $\vec{AD}$ på triangelplanets normal $= \dfrac{|\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \dfrac{2}{3}$

d) Med punkten $A = (1,1,1)$ och riktningsvektorn $\mathbf{v} = \vec{AB}$ är linjens ekvation i parameterform: $\mathbf{r} = \vec{OA} + t\mathbf{v}$, vilket skrivs ut i svaret nedan.

Svar: a) 4,5 b) 3 c) $(x, y, z) = (1,1,1) + t(1,2,2)$

---

3. Bestäm definitions- och värdemängden för funktionen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Funktionen f är definierad då $\ln x$ är det, dvs i $(0, \infty)$. Vi deriverar:
$f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ med enda nollställe $x = e$.
Vi observerar också att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$, samt att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ (enligt gränsvärdeslag). Vi gör en teckentabell för derivatan (gränsvärden inom parentes):

x	0	<	e	<	∞
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$(-\infty)$	↗	e^{-1}	↘	(0)

Av denna undersökning framgår att f antar alla värden i intervallet $(-\infty, \frac{1}{e}]$.

Svar: Definitionsmängden är $(0, \infty)$ och värdemängden är $(-\infty, \frac{1}{e}]$.

---

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 7x + 6}$. Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

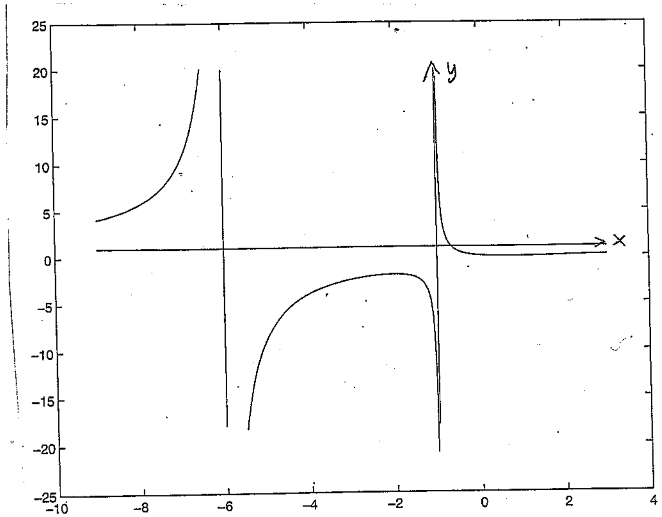
Vi konstaterar först att $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 7x + 6} = 1$, vilket innebär att $y = 1$ är vågrät asymptot i $-\infty$ och $+\infty$. Nämnarens nollställen är $x = -6$, $x = -1$, så f är definierad i $(\infty, -6) \bigcup (-6, -1) \bigcup (-1, \infty)$. Vidare gäller att
$f(x) \to +\infty$ då $x \to -6^-$ och $x \to -1^+$, $f(x) \to -\infty$ då $x \to -6^+$ och $x \to -1^-$. Linjerna $x = -6$ och $x = -1$ är lodräta asymptoter.
Vi undersöker derivatan: $f'(x) = \dfrac{(2x - 2)(x^2 + 7x + 6) - (x^2 - 2x)(2x + 7)}{(x^2 + 7x + 6)^2}$

och efter förenkling och faktoruppdelning: $f'(x) = \dfrac{9(x+2)(x - \frac{2}{3})}{(x+6)^2(x+1)^2}$.

Nollställen: $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$
Vi gör en teckentabell för god översikt:

x	$-\infty$	<	-6	<	-2	<	-1	<	$\frac{2}{3}$	<	$+\infty$
f'(x)		+		+	0	-		-	0	+	
f(x)	(1)	↗	ej def	↗	-2	↘	ej def	↘	-0,08	↗	(1)

Vi ser att f har ett lokalt maximum i $x = -2$ och ett lokalt minimum i $x = -\frac{2}{3}$.



Svar: Asymptoter: $x = -6$, $x = -1$, $y = 1$,
lokalt maximum i $x = -2$, lokalt minimum i $x = \frac{2}{3}$.

5. 1 km från en plats A går en flod med parallella stränder och bredden 100 m. 6 km längre ned längs floden ligger en annan plats B, fast på andra sidan och 2 km från floden. Nu vill man bygga en bro över floden så att färdsträckan mellan A och B via bron minimeras. Man antas röra sig rätlinjigt till och från bron. Var ska bron byggas?

Antag att bron byggs x km nedströms från den punkt på stranden som ligger närmast A. Då är det $6 - x$ km kvar till motsvarande punkt närmast B. Totala sträckan blir då (via Pythagoras sats):

$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{10} + \sqrt{(6-x)^2+4}, \quad 0 \le x \le 6$

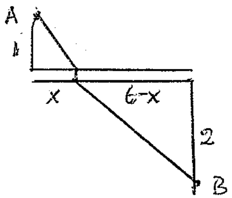
Derivera!

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{-(6-x)}{\sqrt{(6-x)^2+4}}$

$f'(x) = 0 \iff x\sqrt{(6-x)^2+4} = (6-x)\sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow x^2((6-x)^2+4) = (6-x)^2(x^2+1)$

$\Rightarrow 3x^2 + 12x - 36 = 0$ med rötterna $x = -6,\ x = 2$.



Studerar vi tecknen i vänster- och högerled före kvadrering, ser vi att den första är en falsk rot på grund av kvadrering, den andra är sann. Eftersom $f'(0) < 0$, $f'(6) > 0$ måste den kontinuerliga funktionen f' ha teckenvariationen $- \ 0 \ +$, dvs $x = 2$ ger lokalt minimum, tillika minsta värde.

Det finns också en "finurlig" lösning:
Flodens bredd påverkar inte resultatet, den ger ju en konstant term i $f(x)$. I så fall kan vi ersätta floden med en som har bredd noll. Kortaste vägen blir då en rät linje mellan A och B, varmed lösningen lätt hittas med likformighet. Floden kan skjutas in igen för korrekt tolkning.

Svar: Bron ska byggas 2 km nedströms från den punkt på stranden som ligger närmast A.

---

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

a) Ekvationen $x^3 + 2008x^2 + 2008x + 2008 = 0$ saknar reella lösningar.

Svar: Falskt. (Udda gradtal innebär att polynomet antar alla reella värden).

---

b) För alla komplexa, icke-reella tal z gäller att $\mathrm{Re}(z) < |z|$.

Svar: Sant. (Om z inte ligger på realaxeln, så är avståndet $|z|$ till 0 strängt större än avståndet $|\operatorname{Re} z|$ till imaginäraxeln, vilket i sin tur är $\ge \operatorname{Re} z$.)

---

c) För alla θ sådan att $0 < \theta < \pi/4$ så gäller att $\sin\theta < \sin 3\theta$.

Svar: Sant. (Man kan inse att påståendet är sant genom att rita $y = \sin\theta$ och $y = \sin 3\theta$ i samma figur. Annars är $\sin 3\theta - \sin\theta = 2\sin\theta\cos 2\theta$, här är faktorerna positiva i $(0, \frac{\pi}{4})$.)

---

d) Om $f(x)$ är deriverbar för alla x i intervallet $(-1, 1)$ så existerar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Svar: Sant. (f deriverbar i 0 medför att f är kontinuerlig i 0, dvs $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.)

---

e) Om f är deriverbar, $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ så måste $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Svar: Falskt. (Ex: $f(x) = 8(x - \frac{1}{2})^3 - x + 1$. Här är $f'(\frac{1}{2}) = -1$. Kan dock inses utan specifikt exempel genom kurvritnoing.)

---

f) Om $y = f(x)$ är en injektiv (ett-till-ett) funktion och $y = g(x)$ dess invers, så gäller att $(f \circ g \circ f)(x) = f(x)$.

Svar: Sant. ($f \circ (g \circ f) = f \circ (f^{-1} \circ f) = f \circ id = f$.)

---

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x.
   b) Formulera och bevisa *produktregeln*, dvs räknelagen för derivering av en produkt av två funktioner.

Se Adams sid 98 respektive 108-109!
