Tentamen 2011-01-15 : Lösningar

Q.1 (a) Täljaren kan faktoriseras som $x^2(x-3)$. Eftersom $x^2 \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så påverkar den inte tecknet på kvotet, så det räcker att avgöra för vilka x att $\frac{x-3}{x-2} < 0$ gäller. Olikheten uppfylls om och endast om täljaren och nämnaren har olika tecken, som inträffar då $2 < x < 3$.

(b) Systemet ges i matrisform av

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Då vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + R_2,$$

erhåller vi trappstegsformen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

från vilken vi ser direkt att systemet har inga lösningar.

(c) Först kan man betrakta ekvationen som en kvadratisk ekvation för z^2 vars lösningar ges av

$$z^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Vi söker endast en lösning för z, så låt oss anta att $z^2 = 1 + i$. I polär form har vi alltså

$$z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Det finns en positiv kvadratisk rot i den första kvadranten, nämligen

$$z = z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

(d) Vi använder formeln

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}. \tag{1}$$

Här är $f(x) = e^{x^2}$ och $x = e^4$ så $f'(x) = 2xe^{x^2}$ och $f^{-1}(e^4) =$ det t s.a. $f(t) = e^{t^2} = e^4$, alltså $t = +2$, ty definitionsmängden till f består av positiva tal. Insättning i (1) ger då att

$$(f^{-1})'(e^4) = \frac{1}{4e^4}.$$

(e.i) Nämnaren beter sig som $|x|$, och eftersom x är negativ så är gränsvärdet lika med -1.
ii. Då $x \to 0^+$ så går $\ln x \to -\infty$. Därför beter sig $x^{\ln x}$ som en stor negativ potens av ett litet, positivt tal och därmed går mot $+\infty$.
iii. Sätt $u := x - 1$ så gränsvärdet kan skrivas om till

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin(\pi u + \pi)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{-\sin \pi u}{u} = -\pi.$$

(f) Då partikeln befinner sig i punkten $(\cos\theta, \sin\theta)$ så ges dess avstånd från $(1, 0)$ av formeln

$$s = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\theta}.$$

Deriverar vi implicit m.a.p. tiden t så får vi att

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin\theta \frac{d\theta}{dt}}{\sqrt{1 - \cos\theta}}.$$

Det som är nu givet i uppgiften är att $\theta = \pi/4$ och $d\theta/dt = 2$ rad/s. Eftersom $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = 1/\sqrt{2}$ får vi efter insättning att, i det givna ögonblicket, så är

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1 - 1/\sqrt{2}}} \text{ m/s}.$$

Q.2 (a) Vi har $\vec{AB} = (1, 2, 0)$ och $\vec{AC} = (2, 0, 1)$ och beräknar en normal till planet enligt

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}.$$

Planets ekvation har då formen $2x - y - 4z = d$ för något $d \in \mathbb{R}$. Sätter vi in punkten A, säg, i ekvationen så får vi att $d = 2(1) - (1) - 4(1) = -3$, så planets ekvation lyder $2x - y - 4z = -3$.

Från normalen kan vi också beräkna triangelns area enligt

$$\text{Arean} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

(b) Avståndet mellan punkten (x_0, y_0, z_0) och planet $ax + by + cz = d$ ges av formeln

$$s = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Här är $a = 2$, $b = -1$, $c = -4$, $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$. Insättning ger därför att avståndet är $5/\sqrt{21}$.

(c) Linjen har riktningsvektor $\vec{DE} = (1, -1, 1)$ och därmed består av alla punkterna $(t, 1 - t, 2 + t)$, där $t \in \mathbb{R}$. Skärningspunkten erhålls genom insättning i planets ekvation, alltså

$$2(t) - (1 - t) - 4(2 + t) = -3 \Rightarrow t = -6,$$

som innebär att skärningspunkten är $(-6, 7, -4)$.

Q.3 (a) Om $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ så antar f både ett största och minsta värde på intervallet. Dvs, det finns reella tal $m \leq M$ och $x_1, x_2 \in [a, b]$ sådan att $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ och, för alla $x \in [a, b]$ gäller

$$m \leq f(x) \leq M.$$

(b) Funktionens kritiska punkter hittas enligt

$$0 = f'(x) = (\text{kvotregeln}) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e.$$

Denna punkt ligger innanför det givna intervallet, så vi måste testa både denna punkt och de två ändpunkterna. Alltså har vi

$$f(1/2) = -2\ln 2, \quad f(e) = 1/e, \quad f(10) = \frac{\ln 10}{10}.$$

Endast den vänstra ändpunkten ger att negativt f-värde, så detta måste vara ett minimum. Angående maximum, skulle vi kunna jämföra $1/e$ med $\frac{\ln 10}{10}$, men det är enklare att konstatera att, eftersom $f(x) \to 0$ då $x \to +\infty$, så måste den kritiska punkten vara ett lokalt maximum, och t.o.m. ett globalt maximum för f.

SVAR : Minsta värdet på intervallet är $-2\ln 2$ och största värdet är $1/e$.

Q.4 Nämnaren faktoriserar som $(x+1)(x-1)$, som innebär att det finns lodräta asymptoter vid $x = \pm 1$. Man kontrollerar att

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty.$$

Näst, polynomdivision ger

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}, \tag{2}$$

som innebär att $y = x$ är en sned asymptot. De kritiska punkterna erhålls genom att derivera :

$$0 = f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0,$$

så vi har tre kritiska punkter i respektivt $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$. Från funktionens asymptotiska beteende kan vi redan härleda att x_1 ger ett lokalt maximum, x_2 ger en terrasspunkt och x_3 ger ett lokalt minimum.

Slutligen, notera att (2) innebär att grafen till $y = f(x)$ korsar linjen $y = x$ endast då $x = 0$. Nu har vi gott om information för att kunna skissera grafen, som finns på sista sidan.

Q.5 Låt triangelns andra två hörn vara $B = (-x, x^2)$, $C = (x, x^2)$ där $0 < x < 1$. Arean, som en funktion av x, ges då av

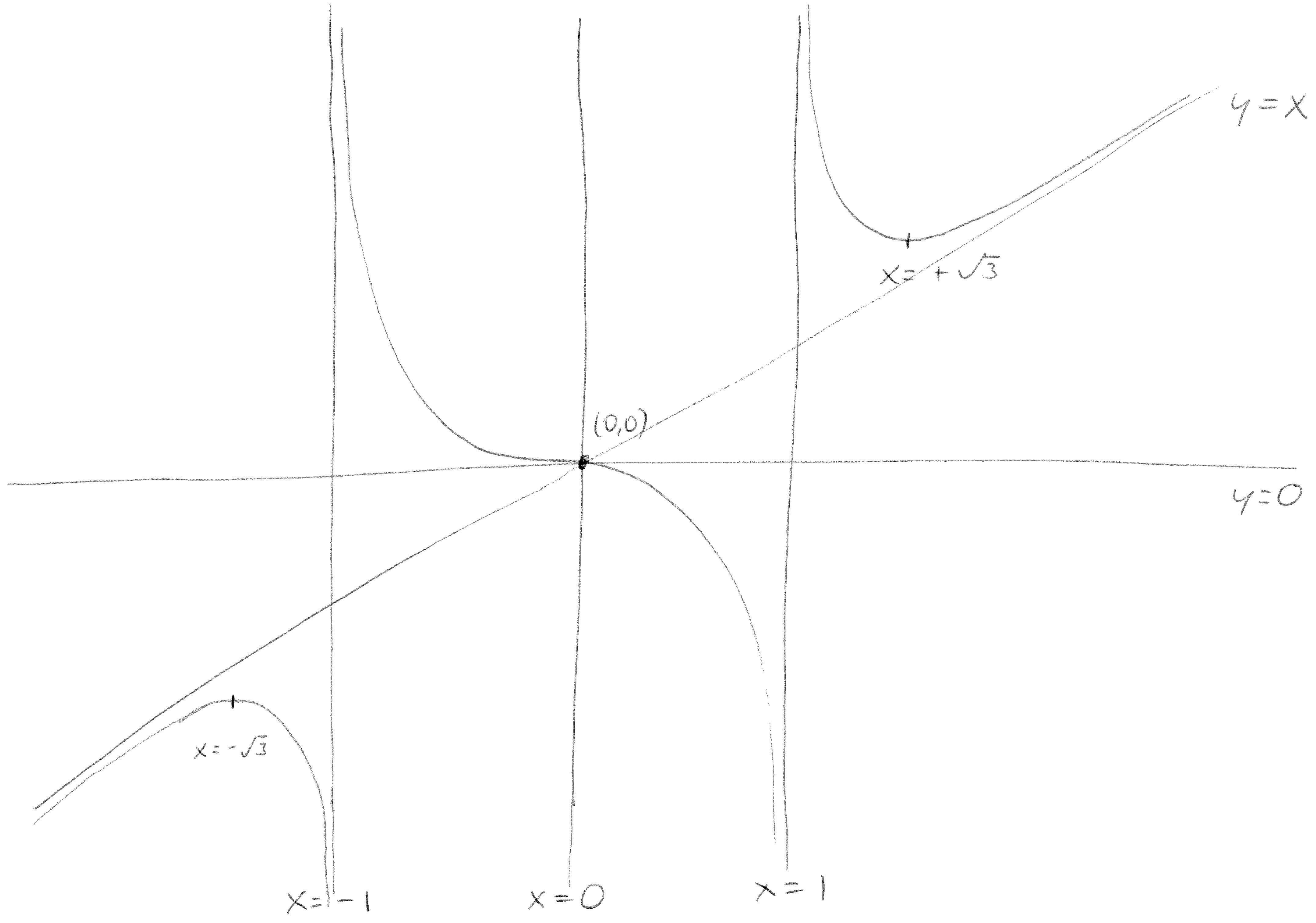
$$A(x) = \frac{1}{2} \times \text{Höjd} \times \text{Bas} = x(1-x^2). \tag{3}$$

Arean maximeras då $0 = A'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow x = 1/\sqrt{3}$. Insättning i (3) ger att den maximala arean är $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Q.6 **(a)** Detta är SANT. Vi har formeln $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, som innebär att $(\sin\theta)(\cos\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta \leq \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$, för alla $\theta \in \mathbb{R}$.
(b) Detta är SANT. Se Sats 2.3.1 i boken.
(c) Detta är FALSKT. Intuitivt kan man ha en funktion som är begränsad men som svänger vilt. För ett konkret exempel, tag $f(x) = \sin(x^2)$. Funktionen är begränsad, ty $-1 \leq f(x) \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Men $f'(x) = 2x(\cos x^2)$. Om $x = \sqrt{2n\pi}$ så är $f'(x) = 2\sqrt{2n\pi}$, som innebär att $f'(x)$ kan bli hur stort som helst (låt $n \to \infty$).

(d) Detta är SANT. Att $f'(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ räcker för att f ska vara inverterbar. Om dessutom $f'(x) > 1$ för alla x, så medför formel (1) ovan att $(f^{-1})'(x) < 1$ för alla x.
(e) Detta är FALSKT. Låt $f(x) = \cos x - x$. Eftersom $f(0) = 1 > 0$ och $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$, så innebär Medelvärdesatsen att ekvationen $f(x) = 0$ har minst en lösning i intervallet $[0, \pi/2]$. Men nu konstatera att $f'(x) = -\sin x - 1$, som är negativ för alla x. Därför är $f(x)$ en strängt avtagande funktion, och en sådan funktion kan inte ha mer än ett nollställe i hela dess definitionsmängd. Alltså har ekvationen $\cos x = x$ exakt EN lösning i intervallet $[0, \pi/2]$.
(f) Detta är FALSKT. Snarare gäller att $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b}$.

Q.7 (a) Se Defintion 2.8.6 i boken.
(b) Se Sats 2.8.12 i boken.



y = x
x = + √3
(0,0)
y = 0
x = - √3
x = -1
x = 0
x = 1