Lösningar till Inledande matemtik för Z1, (TMV120), 2012-01-14

1. (a) Faktorisering ger $15 = 3 \cdot 5$, $49 = 7^2$, och $35 = 5 \cdot 7$. Detta och förkortning ger

$$\frac{15^{16} \cdot 49^7}{35^{15} \cdot 3^{16}} = \frac{3^{16} \cdot 5^{16} \cdot 7^{2\cdot 7}}{5^{15} \cdot 7^{15} \cdot 3^{16}} = \frac{5}{7}$$

Svar: 5/7.

(b) Kedjeregeln ger $f'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x$ och därmed $f'(1) = 2e^0 = 2$.
Svar: 2.

(c) Den utökade koefficientmatrisen A undergår radoperationer:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -14 & -18 & 19 \\ 21 & -10 & 4 & -18 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 21 & -10 & 4 & -18 \\ -6 & -14 & -18 & 19 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -16 & -16 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -13/16 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/16 \end{pmatrix}.$$

I det första stegt byter första och tredje raderna plats. I det andra subtraheras rad 1 multiplicerad med 7 från rad 2 och rad 1 multipliceracd med 2 läggs till rad 3. Därefter multipliceras rad 2 med $-1/3$ och rad 3 med $-1/16$. Till sist subtraheras rad 2 från rad 3. Resultatet är en matris på trappstegsform där sista kolonnen har pivot element. Alltså saknas lösning.
Svar: Det finns ingen lösning.

(d) Man har att $\cos(2v) = 1 - 2\sin^2(v)$ (formel för dubbla vinkeln). Detta ger $\cos(2v) = 1 - 2/9 = 7/9$
Svar: 7/9.

(e) i. Räkneregler för logaritmer ger att $\ln(2x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$. Eftersom $(2x+1)/x \to 2$, när $x \to \infty$, gäller att $\ln(2x+1) - \ln x \to \ln 2$ då.
Svar: $\ln 2$.

ii. Med $Q = (1+x)^{3/2}/\ln(x+1)$ är Q av typen "0/0" när $x \to 0$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger $Q_1 = (3/2)(1+x)^{1/2}/(1/(1+x))$, som har gränsvärdet 3/2, när $x \to 0$. Enligt l'Hospitals regel har Q också detta gränsvärde.
Svar: 3/2.

(f) Om $f^{-1}(\ln 3) = a$, så är $\ln 3 = f(a) = \ln\sqrt{1+a^3}$, så $3 = \sqrt{1+a^3}$ och alltså $9 = 1 + a^3$. Det ger $a = 2$. Alltså är $f^{-1}(\ln 3) = 2$ och $\ln 3 = f(2)$.
Eftersom $f^{-1}(f(x)) = x$, för alla $x > -1$, ger derivering att $Df^{-1}(f(x))f'(x) = 1$, eller $Df^{-1}(f(x)) = 1/f'(x)$. När $f(x) = \ln\sqrt{1+x^3} = (1/2)\ln(1+x^3)$, är $f'(x) = (1/2)(3x^2/(1+x^3)) = 3x^2/(2(1+x^3))$ och alltså är $Df^{-1}(f(x)) = 2(1+x^3)/3x^2$.
Sätter vi $x = a = 2$ ger detta $Df^{-1}(\ln 3) = 2(1+8)/(3\cdot 4) = 3/2$, så tangenten har lutning 3/2 och går genom punkten $(\ln 3, 2)$. Den har därför ekvationen $y = (3/2)(x - \ln 3) + 2$
Svar: $y = 3x/2 + 2 - (3\ln 3)/2$.

2. (a) Planet går genom de tre punkterna A, B och C, så $\bar{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\bar{v} = \overrightarrow{AC}$ är vektorer parallella med planet.
En normal till planet ges av

$$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Planet har därför en ekvation $4x - 3y - 6z = d$. Det går genom $A = (2, 1, 1)$, så $8 - 3 - 6 = d$.

Svar: $4x - 3y - 6z = -1$.

(b) Avstånds formeln ger att avståndet mellan en punkt (a, b, c) och planet är

$$\frac{|4a - 3b - 6c - (-1)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-6)^2}}.$$

Detta ger att avståndet mellan $D = (6, -2, 4)$ och planet är $7/\sqrt{61}$

Svar: $7/\sqrt{61}$.

(c) Punkten D ligger på linjen bara om $\overrightarrow{AD}$ är parallell med normalen $\bar{n}$ till planet. Men

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \bar{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

är inte parallella, eftersom de har samma första koordinat men olika tredje.

Svar: Nej.

3. Eftersom $\sqrt{2x+1}$, bara är definierat när $2x + 1 \geq 0$, dvs när $x \geq -1/2$, är definitionsmängden intervallet $[-1/2, \infty)$.

Dervering med hjälp av produkt- och kedjereglen ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2-x} \cdot D(-x^2 - x) \cdot \sqrt{2x+1} + e^{-x^2-x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \\ &= -e^{-x^2-x}\Big((2x+1)\sqrt{2x+1} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\Big) = -\frac{e^{-x^2-x}}{\sqrt{2x+1}} \cdot \Big((2x+1)^2 - 1\Big) = \\ &= -\frac{e^{-x^2-x}}{\sqrt{2x+1}} \cdot (x+1)(4x) \end{aligned}$$

Här är kvoten i uttrycket alltid ≥ 0, så tecknet på f' bestäms av tecknet på $-4x(x+1)$, som på intervallet $x > -1/2$ bara byter tecken i $x = 0$ och där går från positivt till negativt.

Det betyder att f växer på $[-1/2, 0]$ och avtar på $[0, \infty)$. Detta ger att f :s största värde är $f(0) = 1$.

Av $f(x) = e^{-x^2-x}\sqrt{2x+1}$, ser vi att $f(x) \geq 0$, för alla x och att $f(-1/2) = 0$ som alltså är f :s minsta värde.

Eftersom f är kontinuerlig på intervallet $[-1/2, \infty)$ är värdemängden ett intervall. Av det som framkommit måste det vara $[0, 1]$.

Svar: Defintionsmängen är $[-1/2, \infty)$ och värdemängen är $[0, 1]$.

4. För nämnaren gäller att $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, så den har nollställena -1 och 2. Detta ger att defintionsmängden är alla reella tal utom -1 och 2.

Inget av dessa tal är nollställen till täljaren, så vi har de lodräta asymptoterna $x = -1$ och $x = 2$. Specifikt gäller

$$f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{när} \quad x \to -1^- \\ -\infty & \text{när} \quad x \to -1^+ \\ -\infty & \text{när} \quad x \to 2^- \\ \infty & \text{när} \quad x \to 2^+ \end{cases}$$

När $x \to \pm\infty$, gäller att $f(x) \to 3$, så att $y = 3$ är en vågrät asympot så väl när $x \to \infty$, som när $x \to -\infty$.

Vi avgör var f växer och avtar genom att undersöka f'. Före derivering gör vi polynomdivision och får

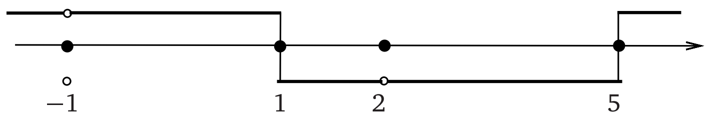
$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 - x - 2} = 3 - \frac{3x - 9}{x^2 - x - 2}.$$

Derivering enligt kvotregeln ger nu

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3(x^2 - x - 2) - (3x - 9)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = -\frac{3x^2 - 18x + 15}{(x^2 - x - 2)^2} = \\ &= \frac{(x - 1)(3x - 15)}{(x - 2)^2(x + 1)^2} = 3 \cdot \frac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 2)^2(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Det betyder att f' växlar tecken i 1 och 5.

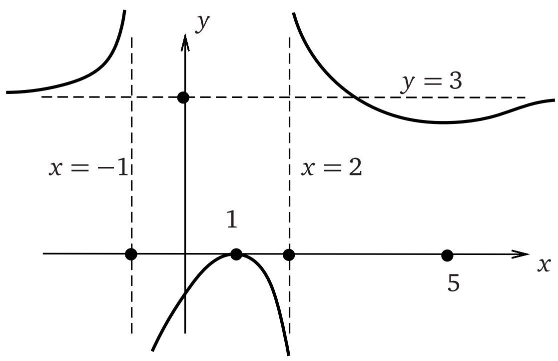
Det ger följande teckenstudium:



som visar att f växer på intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1]$ och $[5, \infty)$, medan den avtar på $[1, 2)$ samt $(2, 5]$.

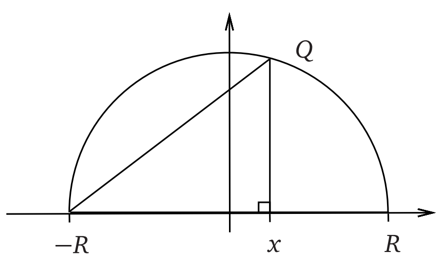
Av detta följer att f har ett lokalt maximum $f(1) = 0$ i $x = 1$ och ett lokalt minimum $f(5) = 3 - 1/3 = 8/3$ i $x = 5$.

Detta ger oss grafen



Vi ser nu att värdemängden är $(-\infty, 0] \cup [8/3, \infty)$.

5. Inför beteckningar som i figuren:



Triangeln har då basen $x - (-R) = x + R$ och höjden $\sqrt{R^2 - x^2}$, så att arean är $(x+R)\sqrt{R^2 - x^2}/2$, där $-R \le x \le R$.

Vi söker största värdet av $f(x) = (x+R)\sqrt{R^2 - x^2}$ på intervallet $[-R, R]$. Svaret är hälften av detta.

Derivering ger

$$f'(x) \quad = \quad \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{(x+R)(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R^2 - x^2 - Rx - x^2}{\sqrt{R^2 - Rx - 2x^2}} = \frac{(R-2x)(R+x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

som på intervallet $(-R, R)$ bara växlar tecken i $x = R/2$ och där går från positvt till negativt när x passerar $R/2$ från vänster till höger. Det betyder att $f:s$ största värde antas när $x = R/2$ och att det är $f(R/2) = (3R/2)R\sqrt{3/4} = 3\sqrt{3}R^2/4$.

Triangelns största area är alltså $3\sqrt{3}R^2/8$.

Svar: $3\sqrt{3}R^2/8$.

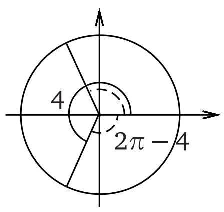
6. (a) Om $\bar{z} = 3/z$, så är $|z|^2 = z\bar{z} = 3$ och $|z| = \sqrt{3}$, som är < 2, så påståendet stämmer

   Svar: Sant.

   (b) När $t \to 0^+$, gäller att $\ln t \to -\infty$. Detta ger att $\ln|x| \to -\infty$, när $x \to 0$ och att $1/\ln|x| \to 0$ då. Alltså gäller att $x \ln|x| \to 0 = f(0)$, när $x \to 0$. Det betyder att f är kontinuerlig i $x = 0$.

   Svar: Sant.

   (c) Det gäller att $\arccos(\cos(x)) = x$, under förutsättning att x är i intervallet $[0, \pi]$. Trigonometriska identiteter (se figuren neda) ger att $\cos 4 = \cos(2\pi - 4)$, där $0 < 2\pi - 4 < \pi$. Det betyder att $\arccos(\cos 4) = \arccos(\cos(2\pi - 4)) = 2\pi - 4 \ne 4$. Påståendet stämmer alltså inte.



   Svar: Falskt.

   (d) Eftersom $f'(t) \to 1$, när $t \to \infty$, så gäller att $f'(t) > 1/2$, för alla tillräckligt stora värden på t. Enligt medelvädes satsen gäller att $f(x+1) - f(x) = f'(t)(x+1-x) = f'(t)$, för något t mellan x och $x+1$. För alla tillräckligt stora värden på x gäller därmed att $f(x+1) - f(x) > 1/2$, eller att $f(x+1) > f(x) + 1/2$. Påståendet stämmer alltså.

   Svar: Sant.

   (e) Med $f(x) = 2x^2$ gäller att $f'(x) = 4x$ och att $f'(1) = 4$. Det ger att normalens riktningskoefficient är $-1/4$. Den går genom $(1, 2)$, så en ekvation för nomalen är $y = (-1/4)(x-1) + 4$. När $x = 4$ blir $y \ne 0$. Punkten $(4, 0)$ ligger alltså inte på normalen.

   Svar: Falskt.

   (f) Derivering av $f(x) = e^{-x^2 - x}$ ger $f'(x) = e^{-x^2-x}(-2x - 1)$ som växlar tecken från positivt till negativt i $x = -1/2$. Det betyder att f har ett lokalt maximum i $x = -1/2$. Påståendet stämmer alltså inte.

   Svar: Falskt.