Lösningar till Inledande matemtik för Z1, (TMV120), 2012-08-29

1. (a) Factorisering, användning av räkneregeler för potenser och förkortning ger

$$\frac{18^{21}\cdot 60^{18}}{30^{18}\cdot 9^{15}\cdot 2^{39}\cdot 3^{11}} = \frac{2^{21}\cdot 3^{2\cdot 21}\cdot 2^{18}\cdot 30^{18}}{30^{18}\cdot 3^{2\cdot 15}2^{39}\cdot 3^{11}} = \frac{2^{21+18}\cdot 3^{42}}{2^{39}\cdot 3^{30+11}} = 3$$

Svar: 3.

(b) Ekvationen $1 = f(x) = \tan x$ har fler än en lösning (de är $x = \pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal). Alltså är f inte inverterbar.

Svar: Finns inte.

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & a & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & a-4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right)$$

Om $a \neq 1$ finns inget pivotelement i sista kolonnen och ekvationssystemet har lösning. Om $a = 1$ finns det ett pivotelement i sista kolonnen och ekvationssystemet saknar lösning.

Svar: $a = 1$.

(d) Vi har att

$$\sin\left|\frac{x+5}{3-x}\right| \geq 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 1$$

Det kan alltså inte finnas några lösnignar efter som $\sin t \leq 1$, för alla reella tal t.

Svar: Inga.

(e) Derivering enligt kedjeregeln (upprepade gånger) ger:

$$f'(x) = e^{\sin^2 x}D(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x}(2\sin x\cdot D(\sin x)) = e^{\sin^2 x}2\sin x\cos x = e^{\sin^2 x}\sin 2x,$$

där vi använt den trigonometriska formeln $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

Svar: $e^{\sin^2 x}\sin 2x$.

(f) i. Omskrivning och känt gränsvärde ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2.$$

Svar: 2.

ii. Omskrivning och kända gränsvärden ger

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+\sin x}{x - 2\ln|x|} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\cancel{x}(2+\frac{\sin x}{x})}{\cancel{x}(1+\frac{2\ln|x|}{|x|})} = \frac{2+0}{1-0} = 2.$$

Svar: 2.

iii.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2} &= \{\text{ l'Hopital }\} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x - 1}{2x} = \{\text{ l'Hopital }\} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{2} = 0.\end{aligned}$$

Svar: 0.

2. (a) Planet $x+y-z=2$ har normal $n=(1,1,-1)$. Linjen genom $P_1=(1,0,-1)$ och $P_2=(0,1,1)$ har riktningsvektor $v=\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-1,-2)$. Normalen n_π för planet Π är alltså ortogonal mot n och v och alltså gäller t ex att

$$n_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Planet Π har därför ekvation $3x-y+2z=D$, för något reellt tal D. Insättning av en punkt i planet, t ex P_1, ger $D=1$. Alltså är $3x-y+2z=1$ en ekvationen för planet.

Svar: $3x-y+2z=1$.

(b) Den sökta linjen ℓ har som riktningsvektor normalen n. Alltså är på parameterform ekvationen för linjen $(x,y,z)=(1,2,1)+t(1,1,-1)$, där t är ett godtyckligt reelt tal.

Svar: T.ex. $x=1+t$, $y=2+t$, $z=1-t$, där t är ett godtyckligt reellt tal.

(c) Insättning av koordinaterna (x,y,z) för linjen ℓ i ekvationen för planet Π ger ekvationen $3(1+t)-(2+t)+2(1-t)=1$, eller $3=1$, som saknar lösning t. Alltså finns det ingen punkt på linjen ℓ som också ligger i planet Π. Detta inser vi ju också direkt ty linjen ℓ är parallell med planet Π så linjen ligger antingen helt i planet eller helt utanför planet och då punkten $(1,2,1)$ på linjen ej ligger i planet så kan alltså aldrig linjen skära planet.

Svar: Linjen skär inte planet.

3. Definitionsmängden för f består av alla reella tal utom 0, dvs den består av intervallen $(-\infty,0)$ tillsammans med intervallet $(0,\infty)$. Eftersom

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}>0$$

är funktionen strängt växande på vardera intervallet. Vidare gäller att

$$\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} f(x)=1+\frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty, \\ \text{samt} \\ \lim_{x\to\infty} f(x)=1-\frac{\pi}{2}. \end{array}$$

Alltså är värdemängden med intervallbeteckningar $(-\infty,1-\pi/2)\cup(1+\pi/2,\infty)$.

Svar: $(-\infty,1-\pi/2)\cup(1+\pi/2,\infty)$.

4. Vi noterar att f är definierad i alla reella tal utom -2. Polynomdivision eller omskrivning av täljaren med hjälp av nämnaren ger

$$f(x)=\frac{x(x+2)-2(x+2)+9}{x+2}==x-2+\frac{9}{x+2}.$$

Av detta ser att linjen $y=x-2$ är asymptot både i $+\infty$ och $-\infty$. Vidare är

$$\begin{array}{l} \lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty \\ \text{och} \\ \lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty. \end{array}$$

Alltså är linjen $x=-2$ en lodrät asymptot.

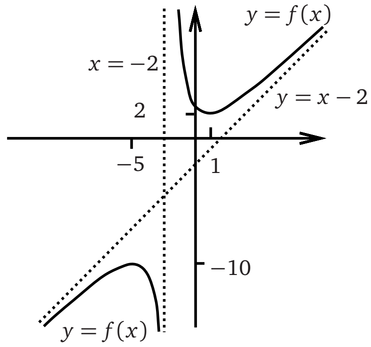
Derivering och gemensamt bråkstreck ger efter faktorisering av täljaren

$$f'(x)=1-\frac{9}{(x+2)^2}=\frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}.$$

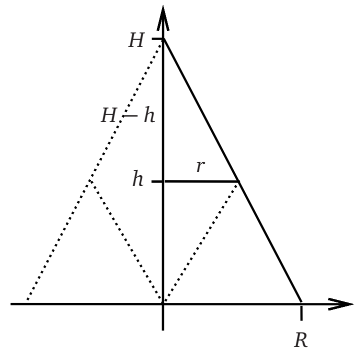
Detta ger teckenstudietabellen

x		-5		-2		1	
f'	$+$	0	$-$	ej def	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	-10	$\searrow$	ej def	$\searrow$	2	$\nearrow$

Vi ser att f har ett lokalt maximum i $x = -5$ och ett lokalt minimum i $x = 1$. Vi får nu en graf som i figuren:



5. Låt den stora konen ha radie R och sin spets på positiva y-axeln och basens centrum i origo.
Om r är den lilla konens radie så ger likformighet att $r/(H-h) = R/H$, vilket ger att $r = R(H-h)/H$. Basen i den lilla konen är därför en cirkelskiva med area $\pi R^2(H-h)^2/H^2$, vilket ger att dess volym $V(h)$ är



$$V(h) = \frac{\pi}{3}(\frac{R}{H})^2(H-h)^2 h,$$

där $0 \le h \le H$.
Vi undersöker ekvationen $V'(h) = 0$ och får, efter att ha tagit bort konstanter, $0 = -2(H-h)h + (H-h)^2 = (H-h)(H-3h)$, dvs $h = H$, eller $h = H/3$. Teckenstudium ger att $h = H/3$ är ett maximum och alltså ger maximal volym för den lilla konen.

6. **Svar:** SSFSSF.

   (a) Olikheten kan skrivas $|z-(2-i)| < \sqrt{5}$ som geometriskt betyder de tal z i komplexa talplanet som ligger strikt inuti en cirkel med radie $\sqrt{5}$ centrerad i $2-i$. Avståndet från origo till punkten $2-i$ är $\sqrt{5}$ så alla punkter z inuti cirkeln har alltså ett avstånd mindre än $2\sqrt{5}$ till origo; dvs uppfyller $|z| < 2\sqrt{5}$.

   (b) Ett resultat i kursen säger att om en funktion är deriverbar i en punkt så är den också kontinuerlig där.

   (c) Det gäller att $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$ så då $\sin\frac{\pi}{6} = 1/2$. Alltså är påståendet falskt.

   (d) Definitionen ger $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h \sin(1/h) - 0}{h}$ och då $0 \le |\frac{\sin^2 h \sin(1/h)}{h}| \le |\frac{\sin h}{h}||\sin(1/h)||\sin h| \le |\frac{\sin h}{h}||\sin h| \le |\frac{\sin h}{h}||h| = |\sin h| \le |h| \to 0$ ger instängningslagen att $f'(0) = 0$.

   (e) Låt $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$. Då gäller $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x})$ och teckenstuditabell visar att $f(1)$ globalt minimivärde så att $0 = f(1) \le f(x)$ för $x > 0$; vilket är den första olikheten. Den andra olikheten bevisas på ett snarlikt vis.

   (f) Vi har att $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, så $f(\tilde{a}) > 0$ för nåt $\tilde{a} > a$ tillräckligt nära a. På liknande vis ses att $f(\tilde{b}) < 0$ för nåt $\tilde{b} < b$ tillräckligt nära b. Då f är kontinuerlig på $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ gäller enligt satsen om mellanliggande värde att f är noll nånstans på intervallet.

7. Se kursboken.