**Lösningar till Inledande matemtik för Z1, (TMV121), 2012-10-27**

1. (a) Systemets utökade koefficientmatris utsätts för radoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Rad 1 läggs till rad 2, Rad 3 minskas med 3x rad 1:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Från rad 3 dras 3x rad 2:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger att $z$ är en fri variabel, så vi kan sätta $z = t$. Andra raden ger då $y = 1 - t$ och första att $x = 1 + (1 - t) + t = 2$.

**Svar:** $x = 2$, $y = 1 - t$ och $z = t$, där $t$ är ett godtyckligt reellt tal.

(b) Låt $\bar{w}$ vara den ginva vektorn. Om man t.ex. sätter

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

så är $\bar{u} \cdot \bar{w} = 6 - 6 + 0 = 0$ och $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0 + 6 - 6 = 0$, så så väl $\bar{u}$ som $\bar{v}$ är vinkelräta mot $\bar{w}$. För att $\bar{u}$ och $\bar{v}$ ska vara parallella ska det finnas en skalär $k$, så att $\bar{v} = k\bar{u}$, d.v.s $0 = 3k$, $1 = -k$ och $2 = 0 \cdot k$. Den första av dessa ekvationer ger $k = 0$, som inte fungerar i den andra. Alltså är $\bar{u}$ och $\bar{v}$ inte parallella.

**Svar:** T.ex. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Polär framställning ger $-8i = 2^3 \cdot e^{-i\pi/2}$, vilket ger att $z = 2^{3/2} \cdot e^{-i\pi/4}$ är en lösning till ekvationen. Vi har $2^{3/2} \cdot e^{-i\pi/4} = 2\sqrt{2}(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}) = 2 - 2i$.

**Svar:** T.ex. $z = 2 - 2i$.

(d) Man har $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$ och $f''(x) = e^{-x}(-1 + x - 1) = e^{-x}(x - 2)$, som är positiv precis när $x > 2$. Därmed är $f$ konvex då $x \in (2, \infty)$

**Svar:** $(2, \infty)$.

(e) i. Förkortning med $e^x$ ger $f(x) = (1+2xe^{-x}-e^{-x})/(2+xe^{-x}-2e^{-x})$. Eftersom $xe^{-x} \to 0$ och $e^{-x} \to 0$, när $x \to \infty$, gäller att $f(x) \to (1+0-0)/(2+1-0) = 1/2$ då.

**Svar:** 1/2.

ii. Förkortning med $x$ ger $f(x) = (e^x/x + 2 - 1/x)/(2e^x/x + 1 - 2/x)$. Eftersom $e^x/x \to 0$ och $1/x \to 0$, när $x \to -\infty$, gäller att $f(x) \to (0+2-0)/(0+1-0) = 2$ då.

**Svar:** 2.

iii. Gränsvärde är av typen ”0/0”. Sätt $Q_1 = (e^x + 2x - 1)'/(2e^x + x - 2)'$, d.v.s $Q_1 = (e^x + 2)/(2e^x + 1)$, som har gränsvärdet $(1 + 2)/(2 + 1) = 1$, när $x \to 0$. L'Hospitals regel ger att även $f(x)$ har gränsvärdet 1, när $x \to 0$.

**Svar:** 1.

(f) Derivering av de båda leden ger

$$8y^3y' + 3x^2 = 2xy^3 + 3x^2y^2y'.$$

Insättning av $x = -1$ och $y = 1$ ger $8y' + 3 = -2 + 3y'$, som ger $y' = -1$ och att tangenten har riktningskoefficienten $-1$. Tangenten går genom punkten $(-1, 1)$ och har alltså ekvationen $y = 1 - 1(x + 1)$.

**Svar:** $y = -x$.

2. (a) Från ekvationen för planet får vi att det har normalen

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

som också är en riktningsvektor för linjen. Den ska gå genom punkte $(2, -3, 4)$, vilket ger att den har parameterframställningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Som ger parameterframställningen $x = 2 + 3t,\ y = -3 + 6t,\ z = 4 + 2t$, där $t$ är ett godtyckligt reellt tal. Ur detta löser vi ut $t$ och får

$$(t =) \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-4}{2},$$

som är en parameterfri framställning av linjen.

**Svar:** $x = 2 + 3t,\ y = -3 + 6t,\ z = 4 + 2t$, där $t$ är ett godtyckligt reellt tal, respektive $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{6} = \dfrac{z-4}{2}$.

(b) Sätt $A = (2, -3, 4)$ och $B = (3, -2, 4)$ och $\bar{u} = \overrightarrow{AB}$ . Aståndet kan så beräknas som (med $\bar{v}$ som i lösningen till a)) $d = |\bar{u} \times \bar{v}|/|\bar{v}|$. Vi har

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-(-3) \\ 4-4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Detta ger $d = \sqrt{4+4+9}/\sqrt{9+36+4} = \sqrt{17}/7$

**Svar:** $\sqrt{17}/7$.

3. Funktionens defintionsmängd består av alla reella tal eftersom nämnaren saknar nollställe. Eftersom funktionen är kontinuerlig kommer värdemängden därför att vara ett intervall.

Vi har

$$f(x) = \frac{(x^2+4) + 2x + 3}{x^2+4} = 1 + \frac{2x+3}{x^2+4}$$

Detta ger att $f(x) \to 1$, när $x \to \pm\infty$, eftersom polynomet i täljaren i det återstående bråket är av lägre grad än det i nämnaren.

Derivering av omskrivningen av $f(x)$ ger

$$f'(x) = \frac{2(x^2+4) - (2x+3) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{8 - 6x - 2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{2(4 - 3x - x^2)}{(x^2+4)^2} = \frac{2(1-x)(4+x)}{(x^2+4)^2}$$

Teckenstudium ger att $f$ är växande på $[-4, 1]$ och avtagande på $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$. Vi har $f(-4) = 1 + (-5)/20 = 3/4$ och $f(1) = 1 + (5/5) = 2$. Eftersom $f(x) \to 1$, när $x \to \pm\infty$, ger detta att $f(x)$ har ett minsta värde $3/4$ och ett största värde 2.

**Svar:** Värdemängen är $[3/4, 2]$.

4. Definitionsmängden till $f(x)$ består av alla reella tal.

Eftersom $\arctan t \to \pi/2$, när $t \to \infty$ och $\arctan t \to -\pi/2$, när $t \to -\infty$, gäller att $f(x) \to 0$, när $x \to \pm\infty$. Den enda sneda/horisontella asymptoten är $y = 0$. Lodrät asymptot saknas.

Derivering (med kedjeregeln) ger

$$f'(x) = \frac{3}{1+9x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{3(1+x^2) - (1+9x^2)}{(1+9x^2)(1+x^2)} = \frac{2(1-3x^2)}{(1+9x^2)(1+x^2)} = \frac{2(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(1+9x^2)(1+x^2)}.$$

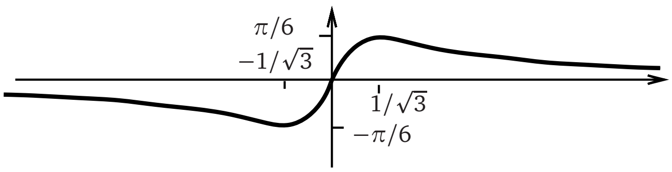
Det betyder att $f(x)$ är avtagande på $(-\infty, -1/\sqrt{3}] \cup [1/\sqrt{3}, \infty)$ och växande på $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$. Eftersom $f(x) \to 0$, när $x \to \pm\infty$, ger detta att $f(x)$ har sitt största värde i $1/\sqrt{3}$, som alltså är en (lokal) max-punkt och sitt minsta värde i $-1/\sqrt{3}$.

Vi har $f(1/\sqrt{3}) = \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$.

Vi konstaterar att $f(x)$ är **udda** $(f(-x) = -f(x))$ och har $f(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$.

Detta ger att värdemängden till $f(x)$ är $[-\pi/6, \pi/6]$.

Informationen ovan leder till följande skiss




**Svar** Definitionsmängden består av alla reella tal. Värdemängden är $[-\pi/6, \pi/6]$. Den enda asymptoten är $y = 0$. Funktionen är avtagande på $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup [1/\sqrt{3}, \infty]$ och växande på $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$. Den är udda och har en max-punkt i $1/\sqrt{3}$ och en min-punkt i $-1/\sqrt{3}$.

5. När $k \leq 0$ saknas lösning eftersom $e^{2x} > 0$ och $\sqrt{x} \geq 0$.

   Vi undersöker vad som händer när $k > 0$. Ekvationen kan skrivas $1/k = \sqrt{x}e^{-2x}$. För att underlätta räkningarna sätter vi $t = \sqrt{x}$ och ska undersöka när $1/k = te^{-2t^2}$ har en entydig lösning $t > 0$.

   Vi sätter $f(t) = te^{-2t^2}$, $t \geq 0$ och har $f'(t) = e^{-2t^2}(1 - 4t^2) = e^{-2t^2}(1 - 2t)(1 + 2t)$. Vilket ger att $f(t)$ är strängt växande på $[0, 1/2]$ och strängt avtagande på $[1/2, \infty)$. Eftersom $f(0) \to 0$, när $t \to 0$ och $f(t) \to 0$, när $t \to \infty$, men betyder det att varje värde mellan 0 och $f(1/2)$ antas två gånger av $f(t)$. Det enda värden som bara antas en gång av $f(t)$ är $f(1/2) = e^{-1/2}/2$. Detta ger att $k$ ska vara $1/f(1/2) = 2\sqrt{e}$ för att den givna ekvationen ska ha precis en lösning.

   **Svar:** $k = 2\sqrt{e}$

6. (a) $f(x) = \arctan(x)$ är strängt växande men $f(x)$ går inte mot $\infty$, när $x \to \infty$, så påståendet är falskt.

   **Svar:** Falskt.

   (b) Vi har $f'(x) = 2/x - 1/(x + 1) = (x + 2)/(x(x + 1))$, som är $> 0$, när $x > 0$. Det ger att $f(x)$ är strängt växande på $(0, \infty)$.

   **Svar:** Sant.

   (c) $f(x) = 1/x,\ x > 0$ är konvex och strängt avtagande, så påståendet stämmer.

   **Svar:** Sant.

   (d) Vi har $f(x) = \ln x/\ln 2$, vilket ger $f'(x) = 1/(x \ln 2)$. Tangentlinjen i punkten $(a, f(a))$ har därför ekvationen $y = \ln a/\ln 2 + (x - a)/(a \ln 2)$. Den går genom origo när $0 = \ln a/\ln 2 - 1/\ln 2$, d.v.s när $a = e$.

   **Svar:** Sant.

   (e) Vektorerna mellan origo och punkten $(1, 0, 0)$ respektive origo och $(0, 1, 0)$ är vikelräta mot varandra. Deras kryssprodukt är vektorn mellan origo och $(0, 0, 1)$ som inte är nollvektorn.

   **Svar:** Falskt.

   (f) Om $z_0^n = 1$, så är $|z_0|^n = 1$, vilket ger $|z_0| = 1$. Därmed är $z_0\bar{z}_0 = |z_0|^2 = 1$. Om vi multiplicerar båda sidor i $z_0 z_0^{n-1} = 1$ med $\bar{z}_0$ får vi därför $z_0^{n-1} = \bar{z}_0$.

   **Svar:** Sant.