Lösningar till Inledande matemtik för Z1, (TMV121), 2013-08-28

1. (a) Vi skriver olikheten som $0 < x^2 - x + 1$ och gör kvadratkomplettering i högerledet: $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4$. Vi ser nu att högerledet är $\geq 3/4$ för alla x.
Svar: För alla reella tal x.

   (b) Kryssprodukten är vinkelrät mot var och en av de två vektorerna i produkten. Vektorn $(1, a, 2)$ är en av dessa, så den är alltid vikelrät mot kryssprodukten.
Svar: För alla värden på a.

   (c) Systemets utökade koefficientmatris reduceras:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & a - 3/2 & b - 1/2 \end{pmatrix}.$$

Om det ska finnas oändligt mång lösningar kan a inte vara skilt från $3/2$, för då är första och andra kolonnerna pivotkolonner. Alltså måste $a = 3/2$. Samtidigt kan då inte b vara skillt från $1/2$, för då saknar andra ekvationen lösning. Alltså måste $b = 1/2$. För dessa värde på a och b är ekvationssystemet ekvivalent med den enda ekvationen $2x+3y = 1$, som är ekvationen för en linje i planet. Systemet har alltså då oädligt många lösningar.
Svar: $a = 3/2$, $b = 1/2$.

   (d) Kedjeregeln ger

$$f'(x) \quad = \quad -\sin(\arctan 2x) \cdot \frac{2}{1 + 4x^2}.$$

Eftersom $\arctan(1) = \pi/4$ ger detta att $f'(/2) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$.
Svar: $f'(1/2) = -\sqrt{2}/2$.

   (e) Vi har $e^{i2\pi/3} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ och $e^{i4\pi/3} = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = -1/2 - i\sqrt{3}/2$ och deras summa är $-1 = e^{i\pi}$. Ekvationen är alltså $z^3 = e^{i\pi}$, som har lösningarna $z = e^{i(\pi/3 + k2\pi/3}$, där $k = 0,\ 1,\ 2$.
Svar: $z = e^{i\pi/3},\ z = -1$ och $z = e^{i5\pi/3}$.

   (f) Omskrivning ger (observera att $\sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} \quad &= \quad \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} = \\ &= \quad \{\text{ förläng med konjgat}\} = \\ &= \quad \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} \to \frac{1}{1+1}, \end{aligned}$$

när $x \to 0$.
Svar: $1/2$.

2. (a) Första linjen har riktningsvektorn $u = (-1, 1, 2)$, den andra $v = (1, -2, 1)$. En normal till ett (eventuellt) pla som innehåller båda linjerna ges därför av $u \times v = (5, 3, 1)$. Första linje går genom punkten $(4, 5, 0)$ så planet ska också gå genom denna punkt. Detta ger att planet har ekvationen

$$0 \quad = \quad (5, 3, 1) \cdot (x - 4, y - 5, z) = 5x + 3y + z - 35.$$

Kontroll visar att även den andera linjen går genom punkten $(4, 5, 0)$. Därmed är det klart att det plan som har ekvationen $5x + 3y + z = 35$ innehåller båda linjerna.
Svar: $5x + 3y + z = 35$.

(b) De två linjerna skär varandra om det finns tal t och s, så att $(4-t, 5+t, 2t) = (as, 1+2s, 2-s)$. Jämförelse av andra koordinaterna ger $5+t = 1+2s$, dvs $t = 2s-4$. Om vi jämför tredje koordinaterna och använder detta värde för t får vi $4s-8 = 2-s$, dvs $s = 10/5 = 2$ och därmed $t = 0$. Till sist jämför vi första koordinaterna. Vi ska ha $4 = a \cdot 2$. Detta ger $a = 2$.

Svar: $a = 2$ och skärningspunkten $(4, 5, 0)$.

3. Funktionen f är definierad för alla reella tal x sådana att $x^2 - 1 \neq 0$. Det ger definitionsmängden $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

När $x \to -1^-$, eller $x \to 1^+$ gäller att $1/(1-x^2) \to -\infty$. Detta ger att $f(x) \to 0$ i dessa fall, för $e^t \to 0$, när $t \to -\infty$.

När $x \to -1^-$ eller $x \to 1k$ gäller att $1/(1-x^2) \to \infty$, så $f(x) \to \infty$ under dessa omständigheter, eftersom $e^t \to \infty$, när $t \to \infty$.

När $x \to \pm\infty$, gäller att $1/(1-x^2) \to 0$, så $f(x) \to e^0 = 1$, i dessa fall.

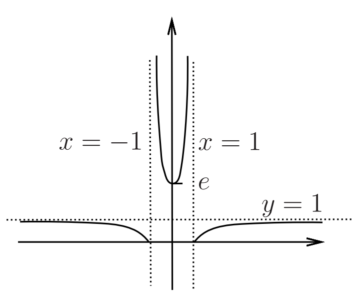
Det ger att vi har två lodräta asymptoter $x = \pm 1$ och en vägrät $y = 0$.

Derivering ger enligt kedjeregeln

$$f'(x) \quad = \quad e^{1/(1-x^2)} \cdot D(1/(1-x^2)) = e^{1/(1-x^2)} \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

Vi ser att f' är 0 bara i $x = 0$ och byter tecken från negativt till positivt vid passage av 0 i stigande riktning. Det ger att f har ett lokalt minimum i $x = 0$, där $f(0) = e$, samt att f är avtagande på intervallen $(-\infty, -1)$ och $(-1, 0]$ och växande på intervallen $[0, 1)$ och $(1, \infty)$.

Vi kan nu skissa grafen med denna information:



Svar Funktionen har definitionsmängden $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Den har asymptoterna $x = \pm 1$ samt $y = 1$. Den har ett lokalt minimum i $x = 0$.

4. När t ligger i intervallet $[0.\pi/2)$ genomlöper $\tan t$ alla värden i intervallet $[0, \infty)$, så vi kan lika gärna beräkna största och minsta värdet av funktionen $g(x) = x/(2+x^2)$, när x ligger i intervallet $[0, \infty)$. Det är klart att $g(x) \geq 0$ för alla sådana x och att $g(0) = 0$. Där med är det klart att minsta värdet är 0. Eftersom $g(x) \to 0$, när $x \to \infty$ och g är deriverbar är det klart att det finns ett största värde och att det anntas i en punkt där g' är 0.

Derivering enligt kvotregeln ger

$$g'(x) \quad = \quad \frac{(2+x^2) - x \cdot 2x}{(2+x^2)^2} = \frac{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{(2+x^2)^2}$$

Därmed är det klart att enda nollstället till g' i intervallet $(0, \infty)$ är $x = \sqrt{2}$. Vi har $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}/4$, som alltså är största värdet.

Svar Minsta värdet är 0 och största är $\sqrt{2}/4$.

5. Vi beräknar derivatan till f när $x \neq 0$:

$$f'(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^{-2}} \cdot \dfrac{-1}{x^2} & \text{om} \quad x < 0 \\ -2xe^{-x^2} & \text{om} \quad x > 0 \end{cases}$$

Därmed är det klart att f är avtagande på intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Samtidigt är det klart att f är negativ när $x < 0$, för $\arctan t$ är negativ när $t < 0$ och att f är > 0, när $x \geq 0$, för e^t är alltid > 0. Vi har också att $f(x) \to 0$ samt $f(x) \to -\pi/2$, när $x \to 0^-$, så värdemängden till f är $(-\pi/2, 0) \cup (0, 1)$, för $e^0 = 1$.

Detta ger också att varje linje parallell med x-axeln skär grafen till f i högst en punkt och alltså är f inverterbar.

För att hitta en formel för f^{-1} löser vi ut x ur $y = f(x)$.

När $y < 0$ ska vi lösa $y = \arctan(1/x)$ som ger $\tan y = 1/x$, och $x = 1/\tan y$.

När $y > 0$ ska vi lösa $y = e^{-x^2}$, som ger $\ln y = -x^2$ och $x = \sqrt{-\ln y}$, för vi ska ha $x \geq 0$.

Detta ger

$$f^{-1}(y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\tan y} & \text{när} \quad -\pi/2 < y < 0 \\ \sqrt{-\ln y} & \text{när} \quad 0 < y \leq 1. \end{cases}$$

I svaret byter vi plats på variablerna x och y i detta.

Värdemängden till f^{-1} är definitionsmängden till f som är alla reella tal. Definitionsmängden till f^{-1} är värdemängden till f som är $(-pi/2, 0) \cup (0, 1)$.

Svar: Värdemängden till f^{-1} är är alla reella tal. Definitionsmängden till f^{-1} är $(-pi/2, 0) \cup (0, 1)$. En formel för f^{-1} ges av

$$f^{-1}(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\tan x} & \text{när} \quad -\pi/2 < x < 0 \\ \sqrt{-\ln x} & \text{när} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

6. (a) När $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$, är de två vektorerna vinkelräta, så de spänner ut en rektangel med area $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$, som samtidigt är längden av $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, som också kan skriva $\sqrt{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})}$. Alltså stämmer påståendet. **Svar:** Sant.

   (b) Det kan inte stämma. Systemet som består av ekvationerna $x = 1$ och $x + 1 = 2$ har fler ekvationer än obekanta, men har lösningen $x = 1$.
   Svar: Falskt.

   (c) Om vi sätter $g(x) = 5$ och $f(x) = \arctan x$, så gäller att $f(x) < g(x)$ för alla x, men $f'(x) > 0 = g'(x)$ för alla x.
   Svar: Falskt.

   (d) Funktionen är definierad för alla x och har derivatan $f'(x) = 3x^2 \ln(1 + x^2) + x^4/(1 + x^2$, som alltid är positiv. Därför är f strängt växande och därför inverterbar.
   Svar: Sant.

   (e) Om vi sätter $z_1 = 0$ och $z_2 = 1$, så gäller $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$, men $|z_1| \neq |z_2|$, så påståendet stämmer inte.
   Svar: Falskt.

   (f) Max/min-satsen säger att en funktionen som är kontinuerlig på ett slutet begränst intervall (vilket $[0, 1]$ är) antar ett största och ett minsta värde på intevallet. Påståendet stämmer alltså.
   Svar: Sant.