Lösningar till Inledande matemtik för Z1, (TMV121), 2013-10-26

1. (a) För att båda logaritmerna ska vara definierade måste vi ha $x > 0$. Räkneregler ger omskrivningen $\log_4(x^2/(x+4)) = 1/2$, som efter exponentiering blir $x^2/(x+4) = 4^{1/2}$. Detta ger ekvationen $0 = x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$ med lösningarna $x = -2$ och $x = 4$. Bara den sista är aktuell med tanke på att vi också ska ha $x > 0$.

   Svar: (Enbart) $x = 4$.

   (b) Vi har

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} \quad = \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-2+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2},$$

   som går mot -1 när $x \to 1$.

   Svar: -1.

   (c) Vi skriver olikheten som

$$0 \quad < \quad 1 - \frac{6}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{x(x+1) - 6x + 2x + 2}{x(x+1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x+1)}.$$

   Vi har teckenväxlingar i -1 och 0 (där uttrycket inte är definierat) samt i 1 och 2. Teckenstudium ger därför att olikheten gäller när $x < -1$, när $0 < x < 1$ samt när $2 < x$.

   Svar: När $x < -1$, när $0 < x < 1$ samt när $2 < x$.

   (d) Systemets utökade koefficientmatris reduceras:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & a+4 & b-2 \end{pmatrix}.$$

   Om det ska finnas oändligt mång lösningar kan $a+4$ inte vara skiljt från noll, för då är första och andra kolonnerna pivotkolonner. Alltså måste $a = -4$. Samtidigt kan då inte $b-2$ vara skiljt från noll, för då saknar andra ekvationen lösning. Alltså måste $b = 2$. För dessa värde på a och b är ekvationssystemet ekvivalent med den enda ekvationen $x - 2y = 1$, som är ekvationen för en linje i planet. Systemet har alltså då oädligt många lösningar.

   Svar: $a = -4$, $b = 2$.

   (e) Med $f(x) = 1/x$ har vi att $f'(x) = -1/x^2$, så tangenten i punkten $(a, 1/a)$ har därför riktningskoefficient $-1/a^2$. Eftersom tangenten går genom nämnda punkt har den ekvationen $y = -(x-a)/a^2 + 1/a$. För att den ska gå genom punkten $(0,3)$ krävs att $3 = 1/a + 1/a$, vilket ger $a = 2/3$. Tangentens ekvation är därför $y = -9(x-2/3)/4 + 3/2$.

   Svar: $y = -9x/4 + 3$.

   (f) Derivering av ekvationen ger (tänk på y som funktion av x):

$$y^3 + 3xy^2y' + 4xy + 2x^2y' \quad = \quad 0.$$

   Vi sätter in att $x = 1$ och att $y = 1$ och får $1 + 3y' + 4 + 2y' = 0$, eller $y' = -1$, som är tangentens riktningskoefficient. Eftersom den går genom punkten $(1,1)$ ger det att den har ekvationen $y = -(x-1) + 1 = -x + 2$.

   Svar: $y = -x + 2$.

2. (a) En normal till planet ges (t.ex) av $\bar{u} \times \bar{v}$ där $\bar{u} = \vec{AB}$ och $\bar{v} = \vec{AC}$ om vi sätter $A = (1, -1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ och $C = (2, 5, 1)$. Detta ger

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Vi väljer normalen $\bar{n}$ som är $-1/4$ gånger denna vektor och får att planet har ekvationen $2x - y + 4z = d$. Eftersom det går genom A har vi $2 + 1 = d$.

Svar: $2x - y + 4z = 3$.

(b) Vi parametriserar linjen genom att uttrycka x, y och z med hjälp av t utgående från

$$t = \frac{x-1}{a+1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1-a}.$$

Detta ger

$$\begin{cases} x = 1 + (a+1)t \\ y = 2t \\ z = 1 + (1-a)t \end{cases}$$

så linjen har riktningsvektorn

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 1-a \end{pmatrix}.$$

För att linjen ska vara parallell med planet krävs att $\bar{w}$ och $\bar{n}$ är vinkelräta, vilket ger ekvationen $0 = \bar{v} \cdot \bar{n} = 2(a+1) - 2 + 4(1-a)$, dvs $0 = -2a + 4$ eller $a = 2$.

Svar: $a = 2$.

3. Funktionen f är definierad för alla reella tal x sådana att $x^2 - 2 \neq 0$. Det ger definitionsmängden $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

När $x \to -\sqrt{2}^-$, eller $x \to \sqrt{2}^+$ gäller att $1/(x^2 - 2) \to \infty$. Detta ger att $f(x) \to \infty$ i dessa fall.

När $x \to -\sqrt{2}^+$ eller $x \to \sqrt{2}^-$ gäller att $1/(x^2 - 2) \to -\infty$, så $f(x) \to -\infty$ under dessa omständigheter.

När $x \to -\infty$, gäller att $f(x) \to 0$, och när $x \to \infty$, gäller att $f(x)/x \to \infty$. Alltså är $y = 0$ en asymptot i $-\infty$ men inte i ∞.

Det ger att vi har två lodräta asymptoter $x = \pm\sqrt{2}$ och en vägrät $y = 0$ i $-\infty$.

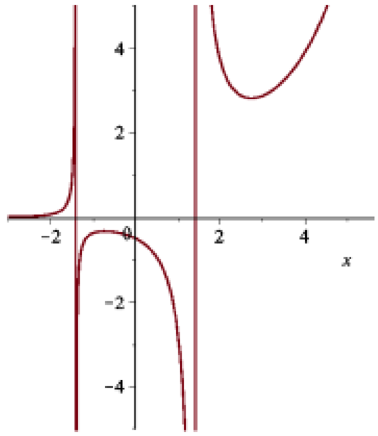
Derivering ger enligt kvotregeln

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2 - 2x)}{(x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2}$$

Detta ger att f':s tecken bestäms av $x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3 = (x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$. Alltså är f strängt avtagande på intervallen $[1 - \sqrt{3}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}]$ och strängt växande på $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, \infty)$.

Alltså har $f(x)$ ett lokalt maximum i $1 - \sqrt{3}$ och ett lokalt minimum i $1 + \sqrt{3}$. Vi har $f(1 - \sqrt{3}) = e^{1-\sqrt{3}}/(2(1 - \sqrt{3}))$, som är negativt och $f(1 + \sqrt{3}) = e^{1+\sqrt{3}}/(2(1 + \sqrt{2}))$, som är positivt.

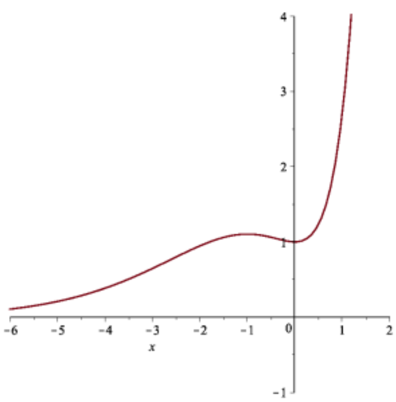
Vi sammanfattar i en figur:



Svar: Funktionen har definitionsmängden $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. Den har asymptoterna $x = \pm\sqrt{2}$ samt $y = 0$ i $-\infty$. Den har ett lokalt maximum i $x = 1 - \sqrt{3}$ och ett lokalt minimum i $1 + \sqrt{3}$. Värdemängden är $(-\infty, e^{1-\sqrt{3}}/(2(1-\sqrt{3}))] \cup (0, \infty)$.

4. Funktionen $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$ är definierad för alla reella tal och $f(x) \to 0$, när $x \to -\infty$, samt $f(x) \to \infty$, när $x \to \infty$.

   Vi har $f'(x) = e^x(x^2 - x + 1 + 2x - 1) = e^x x(x+1)$, vars tecken bestäms av $x(x+1)$. Det betyder att $f(x)$ är strängt växande på intervallen $(-\infty, -1]$ och $[0, \infty)$ samt strängt avtagande på $[-1, 0.]$ Vi har $f(-1) = e^{-1} \cdot 3$ som är större än $f(0) = 1$, eftersom $e < 3$.



   Detta ger att lösningar saknas om $K \leq 0$, för då ligger K inte i funktionens värdemängd som enligt ovan är $(0, \infty)$.

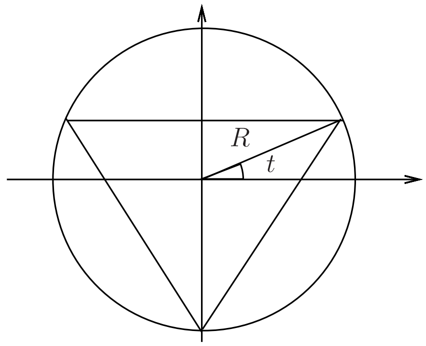
   När $0 < K < 1$ och när $3/e < K$ finns det exakt en lösning.

   När $K = 1$ och $K = 3/e$ finns det exakt två olika lösningar.

   I övrigt finns det tre olika lösnigar.

   Svar: Ingen lösning när $K \leq 0$, precis en lösning när $0 < K < 1$ och när $K > 3/e$, precis två olika lösningar när $K = 1$ och när $K = 3/e$, precis tre olika lösningar när $1 < K < 3/e$.

5. Vi tittar på ett tvärsnitt genom konens topp och sfärens medelpunkt:



Inför vinkeln t som i figuren. Vi kan förutsätta att $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Cirkelskivan som utgör konens bas har nu radien $R\cos t$ och höjden är $R + R\sin t$ vilket ger formeln

$$V(t) = \frac{\pi R^3}{3}(1+\sin t)\cos^2 t$$

för volymen.

Vi har

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{\pi R^3}{3}\Big(\cos^3 t - 2(1+\sin t)\cos t \sin t\Big) = \\ &= \frac{\pi R^3}{3} \cdot \cos t(1 - 2\sin t - 3\sin^2 t) = -\frac{\pi R^3}{3} \cdot \cos t(\sin t + 1)(3\sin t - 1). \end{aligned}$$

På intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ har vi teckenväxling i $t_0 = \arcsin(1/3)$: när $-\pi/2 < t < t_0$ är V' positiv, när $t_0 < t < \pi/2$ är V' negativ. Det gör att V antar sitt största värde i $t_0 = \arcsin(1/3)$. Eftersom $\cos(t_0) = \sqrt{1 - \sin^2(t_0)} = 2\sqrt{2}/3$ har vi

$$V(t_0) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

Svar: $32\pi R^3/81$.

6. (a) Om $z = r(\cos t + i\sin t)$, så är $\bar{z} = r(\cos t - i\sin t) = r(\cos(-t) + i\sin(-t))$, så det stämmer.

   Svar: Sant.

   (b) Avståndet mellan en punkt (x, y, z) vilken som helst och planet ges av formeln $|2x - 2y + z - 3|/\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$, som för $(1, -3, 5)$ blir $10/3$.

   Svar: Falskt.

   (c) Om x_0 är en kritisk punkt till $f(x)$ gäller att $f'(x_0) = 0$. Derivatan av $g \circ f$ i punten x_0 ges enligt kedjeregeln av $g'(f(x_0))f'(x_0)$, som är 0 eftersom $f'(x_0) = 0$. Alltså är x_0 en kritisk punkt till $g \circ f$.

   Svar: Sant.

   (d) Vi har $f'(x) = e^x(x^2 - x + 2x - 1) = e^x(x^2 + x - 1)$ och $f''(x) = e^x(x^2 + x - 1 + 2x + 1) = e^x x(x+3)$, som är negativ mellan -3 och 0. Alltså är f konkav (nedåt) där.

   Svar: Falskt.

   (e) Med $z = 1 + \sqrt{2} + i(1 + \sqrt{2})$ har vi $|z - 1 - i| = |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$, men $|z| = (1 + \sqrt{2})\sqrt{2} > 2$.

   Svar: Falskt.

(f) Enligt derivatans definition är $f'(0)$ gränsvärdet av $(f(0+h)-f(0))/h$ när h går mot 0. Med förutsättningarna är kvoten $f(h)/h$. Att variabeln heter h och inte x spelar ingen roll.

Svar: Sant.