Lösningar till Inledande matemtik för Z1, (TMV121), 14-01-18

1. (a) Räkneregler för potenser ger

$$\frac{(u^{1/2})^{1/5}(u^{-1/5})^2}{(u^{1/4})^2(u^{2/5})^{1/4}} \quad = \quad u^{1/10-2/5}u^{-2/4-2/20} = u^{-3/10-6/10} = u^{-9/10}.$$

Svar: $u^{-9/10}$.

(b) Kvadratkomplettering ger $(x-1)^2+(y+5)^2-26+23=0$ eller $(x-1)^2+(y+5)^2 = (\sqrt{3})^2$. Detta ger medelpunkten $(1,-5)$ och radien $\sqrt{3}$.
Svar: Radien är $\sqrt{3}$ och medelpunkten har koordinaterna $(1,-5)$.

(c) Derivering enligt kvot- och produktreglerna ger

$$g'(x) \quad = \quad \frac{(f(x)+xf'(x))(1+\sqrt{x}) - xf(x)/(2\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}.$$

Detta ger

$$g'(4) \quad = \quad \{f(4)=9,\, f'(4)=-3\} = \frac{(9-12)\cdot 3 - 36/4}{9} = \frac{-9-9}{9} = -2$$

Svar: -2.

(d) Det gäller att $f^{-1}(y)=x$, om $y=f(x)$, så vi löser ut x ur denna ekvation: $y=(2-3x)/(x+4)$. Efter multiplikation med $x+4$ blir det $y(x+4)=2-3x$, eller $x(y+3)=2-4y$. Alltså är $f^{-1}(y)=x=(2-4y)/(y+3)$ och $f^{-1}(x)=(2-4x)/(x+3)$.
Svar: $f^{-1}(x)=(2-4x)/(x+3)$.

(e) Vänstra ledet i olikheten är alltid ≥ 0, så samma sak måste gälla för x i högra ledet, som heller inte kan vara 0 på grund av division med x i vänstra ledet. Vi kan alltså förutsätta att $x>0$ och då spelar absolutbeloppet i vänstar ledet ingen roll, så vi ska lösa $1+6/x \leq x$ under förutsättning att $x>0$. Olikheten skrivs $0 \leq x-1-6/x$ och vi har

$$0 \quad \leq \quad x-1-\frac{6}{x} = \frac{x^2-x-6}{x} = \frac{(x-3)(x+2)}{x}$$

Täljaren har bara en teckenväxling när $x>0$, så de $x>0$ för vilka olikheten gäller är de för vilka $x \geq 3$.
Svar: $x \geq 3$.

(f) Funktionens definitionsmängd är intervallet $[-5,1]$. Derivering ger enligt kedjeregeln

$$f'(x) \quad = \quad \frac{-2x-4}{2\sqrt{(1-x)(x+5)}}$$

som bara har en teckenväxling i -2 i intervallet. Vi får att $f(x)$ är växande på $[-5,-2]$.
Svar: $f(x)$ är växande på intervallet $[-5,-2]$.

2. (a) Vi bestämmer en parametriserng av den givna linjen genom att lösa ut x, y och z med hjälp av t i ekvationerna

$$t = \frac{x-2}{2} = 7+y = \frac{z+6}{-3}.$$

Vi får

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Därmed är

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

en riktningsvektor för linjen och en normal till planet, eftersom det är vinkelrätt mot linjen. Detta ger att planet har en ekvation av formen

$$2x + y - 3z = d.$$

Eftersom planet går geonom punkten $(-2, 0, 3)$ ska vi ha $-4 + 0 - 9 = d$, så att $d = -13$.

Svar: $2x + y - 3z + 13 = 0$.

(b) Enligt (a) ges en parametrisering av linjen av $x = 2+2t$, $y = -7+t$, $z = -6-3t$. Vi bestämmer t så att vi får en punkt i planet genom insättning i planets ekvation:

$$2(2 + 2t) + (-7 + t) - 3(-6 - 3t) + 13 = 0,$$

vilket ger $28 + 14t = 0$, och $t = -2$. Detta ger att skärningspunktens koordinater är $(2 - 4, -7 - 2, -6 + 6) = (-2, -9, 0)$.

Svar: $(-2, -9, 0)$.

3. (a) Gränsvärdet är av typen "0/0", så vi prövar med l'Hospitals regel. Derivering av täljare och nämnare för sig ger kvoten

$$Q_1 \quad = \quad \frac{-\pi \cos(\pi x/2)/2}{2 \ln(x)/x}$$

som fortfarande ger ett gränsvärde av typen "0/0" när $x \to 1$. Ytterligare derivering enligt samma princip ger kvoten

$$Q_2 \quad = \quad \frac{\pi^2 \sin(\pi x/2)/4}{2/x^2 - \ln(x)/x^2},$$

som har gränsvärdet $\dfrac{\pi^2/4}{2-0} = \pi^2/8$ när $x \to 1$. L'Hospitals regel ger att Q_1 har samma gränsvärde liksom den ursprungliga kvoten.

Svar: $\pi^2/8$.

(b) Gränsvärdet är av typen "$\infty - \infty$". Vi bryter ut det som dominerar i varje term och får ($x = \sqrt{x^2}$ eftersom x kan förutsättas positivt)

$$\sqrt{1 + x^2} - x \arctan x \quad = \quad x(\sqrt{1/x^2 + 1} - \arctan x)$$

Här gäller att den andra faktorn $\to 1 - \pi/2 < 0$ när $x \to \infty$, medan den första $\to \infty$. Detta ger att det sökta gränsvärdet är $-\infty$.

Svar: $-\infty$.

4. Funktionen $f(x) = e^{-x^2} x\sqrt{4 + 1/x^2}$ är definierad för alla reella tal utom 0. Vi ser att funktionen är udda: $f(-x) = -f(x)$, så vi börjar med att bestämma värde mängden när $x > 0$. Då har vi (eftersom $x = \sqrt{x^2}$) att $f(x) = e^{-x^2}\sqrt{1 + 4x^2}$. Det betyder att $f(x) \to 1$, när $x \to 0^+$ och att $f(x) \to 0$ när $x \to \infty$.

   Derivering enligt produkt- och kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2}(-2x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{4x}{\sqrt{1 + 4x^2}}) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1 + 4x^2}} \cdot (-2x(1 + 4x^2) + 4x) = \\ &= \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1 + 4x^2}} \cdot 2x(1 - 4x^2) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1 + 4x^2}} \cdot 2x(1 - 2x)(1 + 2x) \end{aligned}$$

   som är positivt för $0 < x < 1/2$ och negativt när $x > 1/2$. Det betyder att $f(x)$ är strängt växande när $0 < x \leq 1/2$ och strängt avtagande när $x \geq 1/2$. Vi får (med tanke på gränsvärdena ovan) att värdemängden är intervallet $(0, f(1/2))$, när vi inskränker f till intervallet $(0, \infty)$. Vi har $f(1/2) = \sqrt{2}/e^{1/4}$.

   För negativa värden på x gäller att $f(x) = -f(-x)$, vilket ger att f inskränkt till intervallet $(-\infty, 0)$ har värdemängden $(-f(1/2), 0)$.

   Svar: Värdemängden är $(-\sqrt{2}/e^{1/4}, 0) \cup (0, \sqrt{2}/e^{1/4})$.

5. Om vi sätter A:s första koordinat till x, så blir den andra $y = \sqrt{1 - (x/2)^2}$, dvs $A = (x, \sqrt{1 - (x/2)^2})$. Här gäller att $0 \leq x \leq 2$. De två vektorerna $\vec{BC}$ och $\vec{BA}$ spänner tillsammans en parallellogram vars halva area är arean av triangeln med hörn i A, B och C. Parallellogrammens area är absolutbeloppet av determinanten med de två vektroernas koordinater som kolonner. Vi sätter

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2 & x \\ -1 & \sqrt{1 - (x/2)^2} - 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{1 - (x/2)^2} - 2 + x = x + \sqrt{4 - x^2} - 2$$

   Vi ska bestämma $0 \leq x \leq 2$, så att $|f(x)|/2$ är störst möjligt. Vi bestämmer därför f:s största och minsta värde på intervallet $[0, 2]$. Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}(\sqrt{4 - x^2} + x)} = \\ &= \frac{2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{\sqrt{4 - x^2}(\sqrt{4 - x^2} + x)} \end{aligned}$$

   Här är nämnaren alltid positiv för x i intervallet $(0, 2)$, medan täljaren har en teckenväxling i $\sqrt{2}$. Det ger att $f'(x)$ är positiv i intervallet $(0, \sqrt{2})$ och negativ i intervallet $(\sqrt{2}, 2)$. Vi har $f(0) = f(2) = 0$, så f:s minsta värde är 0, medan det största är $f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1)$.

   Det största värde som $|f(x)|/2$ har när x ligger i $[0, 2]$ är därför $\sqrt{2} - 1$.

   Svar: $\sqrt{2} - 1$.

6. (a) Vi har

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1 + x^2}$$

   och

$$f''(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2}{(1 + x^2)^2}$$

   som är positiv för alla x. Därför är $f(x)$ konvex på intevallet som är hela tallinjen.
   Svar: Sant.

(b) Vi har

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1 + a\sin x) - a\cos^2 x}{(1 + a\sin x)^2} = \frac{-\sin x - a}{(1 + a\sin x)^2}$$

Vi ska ha att detta är 0 när $x = -\pi/6$. dvs $0 = -\sin(-\pi/6) - a$, vilket ger $a = 1/2$.

Svar: Sant.

(c) Den enda möjliga lodräta asympoten är linjen $x = 1$. Vi undersöker f:s gränsvärde när $x \to 1$. Detta ger ett gränsvärde av typen "0/0", så vi prövar med l'Hospitals regel. Deriveiring av täljare och nämnare för sig ger kvoten

$$Q_1 = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1} \cdot \frac{1}{1}$$

som har gränsvärdet 0, när $x \to 1$. L'Hospitals regel ger att även $f(x)$ har gränsvärdet 0, när $x \to 1$. Det betyder att f saknar lodrät asymptot.

Svar: Sant.

(d) Om f har en asymptot i ∞ betyder det att f:s värden närmar sig ett speciellt tal när x blir stort, men det säger inget om hur snabbt f varierar över små intervall långt till höger på tallinjen. Man misstänker att det inte stämmer. För att få ett exempel söker vi en funktion som $\to 0$, när $x \to \infty$, men svänger snabbt. Vi prövar med $\sin(x^2)/x$ som har gränsvärdet 0 när $x \to \infty$ och

$$f'(x) = \frac{2x^2 \cos x^2 - \sin x^2}{x^2} = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

som saknar gränsvärde när $x \to \infty$.

Svar: Falskt.

(e) Ekvationen är ekvivalent med $z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 8$, eller $(z+1)^3 = 8$. Tar vi absolutbelopp av båda sidor får vi $|z+1|^3 = 8$, eller $|z+1| = 2$.

Svar: Sant.

(f) Eftersom $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vikelräta har $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ längden $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Vektorn $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ har på samma vis längden $|\mathbf{v}||\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Vektorn $(|\mathbf{v}|^2|\mathbf{u}|)\mathbf{u}$ har däremot längden $|\mathbf{v}|^2|\mathbf{u}|^2$, så påståendet kan inte gälla generellt.

Svar: Falskt.