**Lösningar till Inledande matemtik för Z1/AT1/TD1, TMV122/125/177, 15-10-29**

1. (a) Vi har att $|2-3x| = |3x-2|$ och får att olikheten gäller när $-1 < 3x-2 < 1$, som blir $1/3 < x < 1$.

   **Svar:** Lösningsmängden är intervallet $(1/3, 1)$.

   (b) Faktorisering ger $p(x) = x^3 - 4x^2 - 41x - 36 = (x+4)(x^2 - 8x - 9) = (x+4)(x+1)(x-9)$, som har nollställena $x = -4$, $-1$, och 9. Teckenstudium ger att $p(x) > 0$ precis när $x$ ligger i mängden $(-4,\ -1) \cup (9,\ \infty)$.

   **Svar:** Precis när $x$ ligger i mängden $(-4,\ -1) \cup (9,\ \infty)$.

   (c) Systemets utökade koefficientmatris är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & a & 3-a & 0 \\ 1 & a & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

   Vi gör radoperationer för att nå trappstegsform. Översta raden multipliceras med $-2$ och $-1$ och läggs till andra respektive raderna. Detta resulterar i

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & a-4 & 3-3a & -2 \\ 0 & a-2 & 9-a & 2 \end{pmatrix}$$

   För att det ska finnas oändligt många lösningar måste nedersta raden vara en multipel av den andra raden. Den multipel det måste vara fråga om är $-1$, vilket vi ser genom att inspektera fjärde kolonnen. Detta ger att vi ska ha $-(a-4) = a-2$ och samtidigt $-(3-3a) = 9-a$, som blir $6 = 2a$ och $4a = 12$. Detta ger att det finns oändligt många lösningar precis när $a = 3$.

   **Svar:** När $a = 3$.

   (d) Derivering enligt kvotregeln ger, med hjälp av trigonometriska ettan att

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2}{\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + 2\cos x \sin x} = \frac{1}{1 + \sin 2x}. \end{aligned}$$

   I sista likheten har använts att $\sin 2x = 2\cos x \sin x$.

   **Svar:** $f'(x) = 1/(1 + \sin 2x)$.

   (e) i. Gränsvärdet saknas, eftersom uttrycket bara är definierat för $x > 0$.

   ii. Omskrivning ger

$$\frac{\ln(3+x^2)}{x \sin x} = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(3+x^2) \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

   där de två sista faktorerna går mot $\ln 3 > 0$, respektive $1/1$, när $x \to 0$. Vi har utnyttjat standardgränsvärdet $\sin x/x \to 1$, när $x \to 0$. Eftersom $1/x^2 \to \infty$, när $x \to 0$, gäller därför samma sak för hela uttrycket.

   iii. Räkneregler ger

$$\ln\left(\frac{3x^2+1}{x^2}\right) = \ln(3 + 1/x^2) \to \ln 3,$$

   när $x \to \infty$.

   **Svar:** i. Gränsvärde saknas, ii. $\infty$, iii. $\ln 3$.

(f) Låt $Q = (f(x) - f(2))/(x-2)$, vars gränsvärde när $x \to 2$ är $f'(2)$.
När $x < 2$ gäller

$$Q \quad = \quad \frac{x^2 - 3x + 2 - (4a + b)}{x - 2}.$$

För att detta ska ha ett gränsvärde när $x \to 2$, måste täljaren vara 0, när $x = 2$, eftersom nämnaren då är 0. Det ger vilkoret $4a + b = 0$, som insatt ger

$$Q \quad = \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = x - 1 \to 1,$$

när $x \to 2$.
När $x > 2$ gäller

$$Q \quad = \quad \frac{a(x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{a(x-2)(x+2)}{x-2} = a(x+2) \to 4a,$$

när $x \to 2$. De två ensidiga gränsvärdena 1 och $4a$ ska sammanfalla för att $f'(2)$ ska finnas. Detta ger $a = 1/4$ och, eftersom $4a + b = 0$, att $b = -1$.
**Svar:** $a = 1/4$ och $b = -1$.

2. (a) Vi bestämmmer en riktningsvektor för linjen (som samtidigt är en normal till planet, eftersom det är vinkelrätt mot linjen), genom att sätta de tre kvantiteterna som ska vara lika till $t$. Detta ger $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(2, 3, 4)$. Av detta följer att $(2, 3, 4)$ är koordinater för en normalvektor till planet, som därmed har en ekvation av formen $2x + 3y + 4z = d$.
Eftersom planet ska gå genom $(3, 2, 1)$, får vi $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = d$, eller $d = 16$.
**Svar:** $2x + 3y + 4z = 16$.
(b) Vi har (från a)) att $P = (1, 2, 3)$ är en punkt på linjen och att $v = (2, 3, 4)$ är en riktningsvektor för den. Vi låter $w$ vara vektorn från $P$ till $Q = (3, 2, 1)$. Den har koordinater $w = (2, 0, -2)$. Tillsammans spänner $v$ och $w$ ut en parallellogram vars area kan beräknas som $|v \times w| = |(-6, 12, -6)| = 6\sqrt{6}$, men också som $h|v| = h\sqrt{29}$, där $h$ är avståndet mellan linjen och $Q$.
Detta ger $h = 6\sqrt{6/29}$.
**Svar:** $6\sqrt{6/29}$.

3. Funktionen $f(x) = x^2 - 3x + \arctan x$, är definierad för alla $x$. Vi har att $f(x) \to \infty$, när $x \to \pm\infty$. Detta gör att vi kan vara säkra på att funktionen har ett minsta värde i en punkt som måste vara nollställe till $f'(x)$.
Derivering ger

$$f'(x) \quad = \quad 2x - 3 + \frac{2}{1 + x^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{1 + x^2} = \frac{(x-1)(2x^2 - x + 1)}{1 + x^2}$$

Eftersom $2(x^2 - x/2 + 1/2) = 2((x - 1/4)^2 + 7/16)$, är $x = 1$ enda nollstället till $f'(x)$. Minsta värdet är därför $f(1) = 1 - 3 + 2 \cdot \pi/4 = \pi/2 - 2$.
**Svar:** $\pi/2 - 2$.

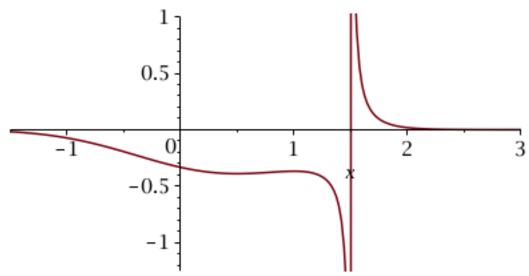
4. Funktionen $f(x) = e^{-x^2}/(2x - 3)$ är definierad för alla reella tal utom $3/2$.
Vi har att $f(x) \to -\infty$, när $x \to 2/3^-$, och $f(x) \to \infty$, när $x \to 2/3^+$. Därför är linjen $x = 3/2$ en lodrät asymptot.
Vidare gäller att $f(x) \to 0$, när $x \to \pm\infty$, så $y = 0$ är en horisontell asymptot.

Derivering ger

$$f'(x) \quad = \quad \frac{e^{-x^2}(-2x)(2x-3) - e^{-x^2}\cdot 2}{(2x-3)^2} = \frac{e^{-x^2}}{(2x-3)^2}\cdot(-2)(x-1)(2x-1).$$

Detta ger att $f'(x) < 0$ på $(-\infty, 1/2) \cup (1, 3/2) \cup (3/2, \infty)$ och $f'(x) > 0$ på $(1/2, 1)$. Vi ser att $f$ har ett lokalt minimum i $1/2$ och ett lokalt maximum i 1.

Vi har $f(1/2) = -1/(2e^{1/4})$ och $f(1) = -1/e^4$. Vi sammanfattar i en figur:




**Svar:** Definitionsmängden är $(-\infty, 3/2)\cup(3/2, \infty)$ och värdemängden $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$. Grafen har den lodräta asymptoten $x = 3/2$ och den horisontella $y = 0$. Funktionen är strängt växande på $[1/2, 1]$ och strängt avtagande på $(-\infty, 1/2] \cup [1, 3/2) \cup (3/2, \infty)$. Funktionen har ett lokalt minimum i $1/2$ och lokalt maximum i 1, men saknar så väl största som minsta värde.

5. En linje genom $(3, 2)$ har en ekvation av formen $y = k(x-3) + 2$ och skär axlarna i punkterna $((3k-2)/k, 0)$ och $(0, 2-3k)$. Triangeln med hörn i dessa och origo har arean som är hälften av $f(k) = -(3k-2)^2/k$. Vi bestämmer $k \in (-\infty, 0)$, så att $f(k)$ är minimalt.

   Vi har

$$f'(k) \quad = \quad -\frac{2\cdot 3\cdot(3k-2)k - (3k-2)^2}{k^2} = -(3k-2)\frac{3k+2}{k},$$

   som är $< 0$ när $k \in (-\infty, -2/3)$ och $> 0$, när $k \in (-2/3, 0)$. Av detta följer att $f$ har ett minsta värde när $k = -2/3$. Den sökta linjen är därför $y = -2x/3 + 4$.

   **Svar:** $y = -2x/3 + 4$.

6. (a) Funktionen $f(x) = |x|$ är kontinuerlig på $(-1, 1)$, men inte deriverbar i 0.

   **Svar:** Falskt.

   (b) Funktionen $f(x) = x$ har egenskapen att $f(x) \to \infty$, när $x \to \infty$, men $f'(x) = 1$, för alla $x$.

   **Svar:** Falskt.

(c) Det gäller att $\tan v = 5$ och att $v \in (0, \pi/2)$. Detta ger $(\sin v/\cos v)^2 = 25$, eller $\sin^2 v = 25\cos^2 v = 25(1-\sin^2 v)$. Av detta följer $\sin^2 v = 25/26$. Eftersom $v$ är i första kvadranten följer det att $\sin v = 5/\sqrt{26}$.

**Svar:** Sant.

(d) Det gäller att $1 - i\sqrt{3} = 2(1/2 - i\sqrt{3}2) = 2e^{-i\pi/3}$. Detta ger $(1-i\sqrt{3})^6 = 2^6 e^{-i2\pi} = 64$.

**Svar:** Falskt.

(e) Triangeln med hörn i origo, $(1, 1, 0)$ och $(0, 1, 1)$ har arean $A = |v \times w|/2$, där $v = (1, 1, 0)$ och $w = (0, 1, 1)$. Det gäller att $v \times w = (1, -1, 1)$ som har längden $\sqrt{3}$. Detta ger att $2A = \sqrt{3}$, som inte är ett heltal.

**Svar:** Falskt.

(f) Medelvärdessatsen ger ett $c \in (1, 2)$, så att $(f(2) - f(1))/(2-1) = f(2) - f(1) = f'(c)$. Vi har att $f(2) - f(1) = 24 - 15 = 9$.

**Svar:** Sant.