**Lösningar till Inledande matemtik för Z1/AT1/TD1, TMV122/125/177, 16-01-05**

1. (a) Vi har

$$\frac{6^5 \cdot 15^2 \cdot 16^3}{10^4 \cdot 9^4 \cdot 32^2} = \frac{3^5 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^4)^3}{2^4 \cdot 5^4 \cdot (3^2)^4 \cdot (2^5)^2} = \frac{2^{5+12} \cdot 3^7 \cdot 5^2}{2^{4+10} \cdot 3^8 \cdot 5^4} = \frac{2^3}{3 \cdot 5^2} = \frac{8}{75}$$

**Svar:** $8/75$.

(b) Vi har $\sqrt{3} - i = 2(-\sqrt{3}/2 - i/2) = 2(\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)) = 2e^{i7\pi/6}$. Ekvationen blir $z^8 = 256e^{i7\pi/6} = 2^8 e^{i7\pi/6}$, som har lösningen $z = 2e^{i7\pi/48}$.
**Svar:** T.ex. $2e^{i7\pi/48}$.

(c) Vi sätter $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 4)$ och $C = (4, 3, 2)$. De två vektorerna $\vec{AB}$ och $\vec{AC}$ spänner en parallellogram vars area är dubbelt så stor som triangelns. Arean av parallellogramen ges av $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$. Vi har

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 4\sqrt{1+4+1} = 4\sqrt{6}$.
**Svar:** $2\sqrt{6}$.

(d) Vi har

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2-1) - 2(x^2-1) + x}{x^2 - 1} = x - 2 + \frac{x}{x^2-1},$$

som ger att $f(x) - (x-2) \to 0$, när $x \to \pm\infty$. Alltså är $y = x - 2$ en asymptot till $f(x)$ i så väl $\infty$ som $-\infty$.
**Svar:** $y = x - 2$.

(e) Vi skriver nedersta raden överst. Då blir systemets utökade koefficientmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Översta raden multipliceras med $-2$ och läggs till andra och tredje raderna. Detta resulterar i

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -23 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

Vi ändrar tecken på nedersta raden och skriver resultatet på rad två:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -23 \end{pmatrix}$$

Vi multiplicerar andra raden med 2 och lägger till den nedersta och för:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Nedersta raden ger $x_4 = 5$, som i andra raden ger $x_3 = 4$. Variabeln $x_2$ är fri så vi sätter $x_2 = t$. Första raden ger nu $x_1 = -21 - 2t$.

**Svar:** När $x_1 = -21 - 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 4$ och $x_4 = 5$, där $t$ är ett godtyckligt reellt tal.

(f) Vi har

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)^2 - (x-2)^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

Vi har tecken växling endast i $x = 3/2$. Uttrycket är inte definierat när $x = 1$ och när $x = 2$.

**Svar:** När $x$ ligger i $(3/2,\, 2) \cup (2,\, \infty)$.

2. (a) Vi bestämmmer en riktningsvektor för linjen i planet genom att lösa ut $x$, $y$ och $z$ i

$$t = 1 - x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

Vi får $x = 1-t,\ y = -2+2t$ och $z = 1+2t$ som ger riktningsvektorn $\vec{v} = (-1, 2, 2)$. Vi lägger samtidigt märke till att $Q = (1, -2, 1)$ är en punkt på linjen och alltså även en punkt i planet $P$.

Från parameterframställningen av den andra linjen ser vi att den har riktningsvektorn $\vec{w} = (1, 2, 1)$ och att $R = (2, -1, 3)$ är en punkt på den linjen.

Från detta fär vi att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är vektorer parallella med planet. Det betyder att $\vec{v} \times \vec{w}$ är en möjlig normal till planet $P$.

Vi har

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Därmed är $\vec{n} = (2, -3, 4)$ en normal till planet som därför har en ekvation av formen $2x - 3y + 4z = d$. Insättning av $Q = (1, -2, 1)$ ger $2 + 6 + 4 = d$.

**Svar:** $2x - 3y + 4z = 12$.

(b) Avståndet mellan de två linjerna är samma som avståndet mellan planet $P$ och en godtycklig punkt på den andra linjen. En sådan punkt är $R = (2, -1, 3)$. Formel för avstånd mellan punkt och plan ger nu att det är

$$\frac{|2 \cdot 2 - 3(-1) + 4 \cdot 3 - 12|}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{7}{\sqrt{29}}.$$

**Svar:** $7/\sqrt{29}$.

3. Vi har

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2}(-10x^2 + 24x^2 - 12x + 10x - 12) = -e^{-x^2}(10x^3 - 24x^2 + 2x + 12) = \\ &= -e^{-x^2}(x-1)(10x^2 - 14x - 12) = -e^{-x^2}(x-1)(x-2)(10x+6) \end{aligned}$$

Detta ger att $f(x)$ är växande på $(-\infty, -3/5] \cup [1, 2]$ och avtagande på $[-3/5, 1] \cup [2, \infty)$. Eftersom $f(x) \to 0$, när $x \to \pm\infty$, ger detta att $f(x)$ har ett största värde som är $f(-3/5)$ eller $f(2)$ och ett minsta som är $f(1) = -e^{-1}$, som ju är negativt. För att avgöra vilket av de två talen som är störst tittar vi på

$$\frac{f(-3/5)}{f(2)} = \frac{15e^{-9/25}}{2e^{-4}} = e^{91/25}\frac{15}{2} > 1.$$

Eftersom $f(2) > 0$ ger detta att $f(-3/5) > f(2)$. Satsen om mellanliggande värden ger att värdemängden till $f(x)$ är intervallet $[f(1), f(-3/5)]$.

**Svar:** $[-e^{-1}, 15e^{-9/25}]$

4. Funktionen $f(x) = xe^{1/x}$ är definierad för alla reella tal utom 0.

   Vi har $f(x) = e^t/t$, om vi sätter $t = 1/x$. När $x \to 0^-$ gäller att $f \to -\infty$ och när $x \to o^+$ att $t \to \infty$. Eftertsom $e^t/t \to 0$, när $t \to -\infty$ och $e^t/t \to \infty$ när $t \to \infty$ har vi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty,$$

   vilket ger att $x = 0$ är en lodrät asymptot.

   Vi söker sneda och har $f(x)/x = e^t \to 1 = k$, när $t \to 0$, dvs när $x \to \pm\infty$. Vidare är $f(x) - kx = x(e^{1/x} - 1) = (e^t - 1)/t$, som är ett gränsvärde av typ "0/0" när $t \to 0$. Vi har $D(e^t - 1)/D(t) = e^t \to 1 = m$, när $x \to \pm\infty$, så $x + 1$ är en sned asymptot till $f(x)$ i $\pm\infty$.

   Derivering ger

$$f'(x) \quad = \quad e^{1/x}\Big(1 - \frac{1}{x}\Big) = e^{1/x} \cdot \frac{x-1}{x}.$$

   Detta ger att $f'(x) < 0$ på $(0, 1)$ och $f'(x) > 0$ på $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Alltså är $f(x)$ strängt växande på $(-\infty, 0) \cup [1, \infty]$ och strängt avtagande på $(0, 1]$.

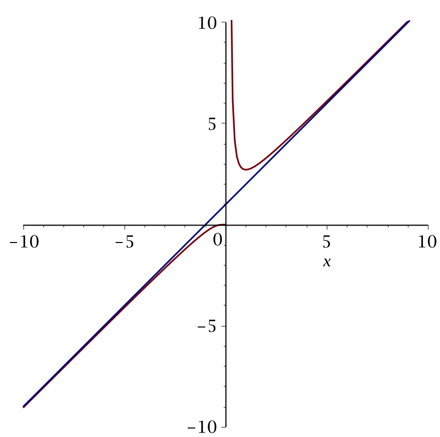
   Vi ser att $f$ har ett lokalt minimum i 1 där $f(1) = e$. Samtidigt saknar $f(x)$ så väl största som minsta värde.

   Vi undersökrer konkavitet med hjälp av

$$f''(x) \quad = \quad e^{1/x}\Big(\frac{-1}{x^2}\Big(1 - \frac{1}{x}\Big) + \frac{1}{x^2}\Big) = e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^3}.$$

   Vi ser att $f''(x) < 0$, när $x < 0$ och att $f''(x) > 0$, när $x > 0$. Detta ger att $f(x)$ är konkav nedåt på $(-\infty, 0)$ och konkav uppåt på $(0, \infty)$.

   Vi sammanfattar i en figur:



**Svar:** Definitionsmängden är $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ och värdemängden $(-\infty, 0) \cup [e, \infty)$. Grafen har den lodräta asymptoten $x = 0$ och den sneda $y = x + 1$. Funktionen är strängt växande på $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ och strängt avtagande på $(0, 1]$. Funktionen har ett lokalt minimum i 1, men saknar så väl lokalt maximum som största och minsta väde. Den är konkav nedåt på $(-\infty, 0)$ och konkav uppåt på $(0, \infty)$.

5. En ekvation för normalen ges av $y = -(1/f'(a))(x - a) + f(a)$, vilket ger att $0 = -(1/f'(a))(b - a) + f(a)$, eller $b = f'(a)f(a) + a$. Detta ger att triageln har bas $b - a = f'(a)f(a)$ och höjden $f(a)$. Arean ges därfär av $A(a) = f'(a)f(a)^2/2$.

   Vi har $A(x) = e^{-x}(1 - e^{-x})^2/2 = (e^x - 1)^2/(2e^{3x})$. Vi söker eventuellt största värde av $A(x)$, när $x > 0$.

   Derivering ger

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2(e^x - 1)e^{4x} - 3(e^x - 1)^2 e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(e^x - 1)e^{3x}(2e^x - 3(e^x - 1)}{e^{6x}} = \\ &= \frac{(e^x - 1)(3 - e^x)}{2e^{3x}} \end{aligned}$$

   Av detta ser vi att $A(x)$ är strängt växande på $(0, \ln 3]$ och strängt avtagande på $[\ln 3, \infty)$. Vi har därför det största värdet $A(\ln 3) = (3 - 1)^2/(2 \cdot 3^3) = 2/27$.

   **Svar:** 2/27.

6. (a) Funktionen $f(x) = \sin x$ på $(0, 2\pi)$ (som är öppet) har värdemängden $[-1, 1]$, som inte är öppen.

   **Svar:** Falskt.

   (b) Vi har $\arctan(\tan \pi) = \arctan(0) = 0 \neq \pi$.

   **Svar:** Falskt.

   (c) Om vi sätter $g(x) = x - f(x)$, så är $g(x)$ kontinuerlig på $[a, b]$, $g(a) < 0$ och $g(b) > 0$. Enligt satsen om mellanliggande värden finns ett $c$ i $(a, b)$, så att $0 = g(c) = c - f(c)$, dvs $f(c) = c$.

   **Svar:** Sant.

   (d) Formeln för dubbla vinkeln tillsammans med trigonometeriska ettan ger

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

   **Svar:** Sant.

   (e) Vi vet att $(f(x) - f(0))/x$ har ett gränsvärde $f'(0)$, när $x \to 0$. Vi har $f(x) = x(f(x) - f(0))/x + f(0)$, som går mot $0 \cdot f'(0) + f(0) = f(0)$, när $x \to 0$.

   **Svar:** Sant.

   (f) Tangenten till grafen i $(a, f(a))$ har ekvationen $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, som går genom origo percis när $0 = f(a) - af'(a)$. Vi ska alltså undersöka antalet lösningar till $0 = (x^3 - 2x^2 - 4x + 20) - x(3x^2 - 4x - 4) = -2x^3 + 2x^2 + 20 = g(x)$. Lösningar finns eftersom $g(x) \to \infty$, när $x \to -\infty$ och $g(x) \to -\infty$, när $x \to \infty$. Derivering ger $g'(x) = -6x^2 + 4x = 2x(2 - 3x)$, vilket ger att $g(x)$ är strängt avtagande på $(-\infty, 0] \cup [2/3, \infty]$ och strängt växande på $[0, 2/3]$. Vi har $g(0) = 20 > 0$. Detta ger att $g(x)$ saknar nollställe på $(-\infty, 2/3]$ och att den har precis ett nollställe i $[2/3, \infty)$.

   **Svar:** Sant.