Lösningar till Inledande matemtik för Z1/AT1/TD1, TMV122/125/177, 16-08-24

1. (a) Vi ska ha $-1 < 2x - 3 < 1$, vilket ger $2 < 2x < 4$ och $1 < x < 2$.
   Svar: $1 < x < 2$.

   (b) Faktorisering enligt faktorsatsen ger $p(x) = (x+1)(x^2 - 10x + 21)$. Kvadratkomplettering ger $p(x) = (x+1)((x-5)^2 - 4) = (x+1)(x-7)(x-3)$, som har teckenväxlingar i -1, 2 och 7. Teckenstudium ger att $p(x) < 0$ när x ligger i $(-\infty, -1) \cup (3, 7)$.
   Svar: $(-\infty, -1) \cup (3, 7)$.

   (c) Linjen $y = 2x-3$ är asypmtot i $\pm\infty$, eftersom $f(x) - (2x-3) \to 0$, när $x \to \pm\infty$. Vi har även att $f(x) \to -\infty$, när $x \to 3$, så $x = 3$ är en lodrät asymptot.
   Svar: $y = 2x - 3$ och $x = 3$.

   (d) Med $v = \arcsin(-5/7)$ har vi att $v \in [-\pi/2, 0]$ och att $\sin v = -5/7$. Detta ger $\cos v = \pm\sqrt{1-(-5/7)^2} = \pm 2\sqrt{6}/7$. Eftersom vinkeln är i fjärde kvadranten är det plustecknet som gäller.
   Svar: $2\sqrt{6}/7$.

   (e) i. Vi bryter ut det som dominerar i täljare och nämnare när $x \to \infty$ och får

   $$\frac{x^5}{e^x} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^{10}}{\frac{x}{e^x} + 3}. \tag{1}$$

   När $x \to \infty$ går första faktorn mot 0 och den andra mot $(1+0)/(0+3) = 1/3$. Detta ger att gränsvärdet är 0.
   Svar: 0.

   ii. Gränsvärdet är av typ 0/0. Vi sätter $Q = \sin(x-1)/\tan(x^2-1)$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger $Q_1 = \cos(x-1)/((1+\tan^2(x^2-1)) \cdot 2x)$, som har gränsvärdet $\cos 0/((1+\tan^2(0)) \cdot 2) = 1/2$, när $x \to 1$.
   Svar: $1/2$.

   iii. Vi har

   $$\ln(3x^2 - 1) - 2\ln x \quad = \quad \ln\left(\frac{3x^2+1}{x^2}\right) = \ln(3 + 1/x^2) \to \ln(3+0), \tag{2}$$

   när $x \to \infty$.
   Svar: $\ln 3$.

   (f) Implicit derivering ger

   $$\frac{3y^2 \cdot y' \cdot x - y^3}{x^2} + 2xy + x^2 y' = 0, \tag{3}$$

   som med $x = y = -2$ ger $-6y' + 2 + 8 + 4y' = 0$, eller $2y' = 10$, så $y' = 5$. Eftersom tangenten går genom $(-2, -2)$ blir dess ekvation $y = 5(x+2) - 2$.
   Svar: $y = 5x + 8$.

2. (a) Planet har en normal som ges av

   $$\vec{n} \quad = \quad \overset{\rightarrow}{AB} \times \overset{\rightarrow}{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

   Detta ger att ekvationen är $4x - 3y - 6z = D$. Planet går genom A vilket ger $8 - 3 - 6 = D$, eller $D = -1$.
   Svar: $4x - 3y - 6z = -1$.

(b) Formel ger att avståndet är

$$\frac{|4\cdot 6 + 2\cdot 3 - 6\cdot 4 + 1|}{\sqrt{16+9+36}} = \frac{7}{61}.$$

Svar: $7\sqrt{61}/61$.

(c) Linjen parametriseras av (planets normal är riktningsvektor och den går genom A):

$$\begin{cases} x &= 2+4t \\ y &= 1-3t \\ z &= 1-6t \end{cases}$$

För D får vi $t = 1$ i första ekvationen som ger punkten $(6, -2, -5)$, som inte är D.

Svar: D ligger inte på linjen.

3. (a) Vi har $f'(x) = 7x^6 + 3x^2$ som är ≥ 0 för alla x. Det ger att $f(x)$ är strängt växande och därmed inverterbar.

(b) Vi har $f^{-1}(f(x)) = x$, för alla x. Derivering ger $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$. Vi löser $5 = f(x) = x^7 + 3x^3 + 1$ och ser att $x = 1$ är lösningen. Detta ger $(f^{-1})'(5) = 1/f'(1) = 1/10$.

Svar: $(f^{-1})'(5) = 1/10$.

4. Nämnaren är 0 när $0 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Detta ger att definitionsmängden är $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$.

Vi har att $f(x) = 3(x-1)^2/((x-2)(x+1)) \to \infty$, när $x \to -1^-$ och när $x \to 2^+$, samt att $f(x) \to -\infty$, när $x \to 2^-$ och när $x \to -1^+$. Det ger de lodräta asymptoterna $x = -1$ och $x = 2$.

Vi har att

$$f(x) = 3 - \frac{3x-9}{x^2-x-2}$$

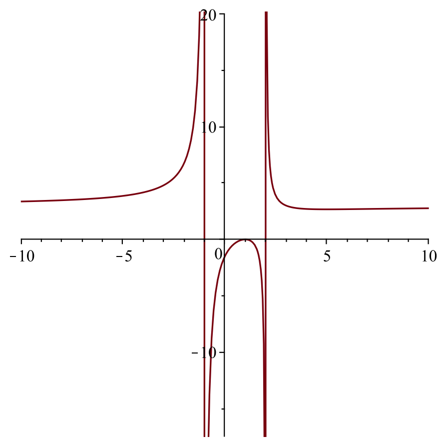
vilket ger att $f(x) \to 3$, när $x \to \pm\infty$, så $y = 3$ är vågrät asymptot i $\pm\infty$.

Derivering ger

$$f'(x) = -\frac{3(x^2-x-2) - (3x-9)(2x-x)}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

Teckenstudium visar att $f'(x) > 0$ på $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (5, \infty)$ och att $f'(x) = 0$, när $x = 1$ och $x = 5$. För övriga x i definitionsmängden är $f'(x) < 0$. Detta ger att $f(x)$ är strängt växande på $(-\infty, -1]$, på $(-1, 1]$ och $[5, \infty)$ med lokalt max i $x = 0$ och lokalt min i $x = 5$. Vi har $f(1) = 0$ och $f(5) = 3 \cdot 16/(3 \cdot 6) = 8/3$.

Vi sammanfattar i en figur:



Svar: Definitionsmängden är $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,\infty)$ $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ och värdemängden $(-\infty,0)\cup[8/3,\infty)$. Grafen har de lodräta asymptoterna $x=-1$ och $x=2$ och den vågräta $y=3$. Funktionen är strängt växande på $(-\infty,-1)\cup(-1,1]\cup[5,\infty)$ och strängt avtagande på $[1,2)\cup(2,5]$. Funktionen har ett lokalt maximum i 1, och ett lokalt minimum i $x=5$. Största och minsta värde saknas.

5. Om R är radien i den yttre konen och r den in den mindre ger likformighet att $r/(H-h)=R/H$, eller $r=R(H-h)/H$. Den minder konen har därför volymen $f(h)=(\pi R^2)/(3H^2)\cdot h(H-h)^2$, där $h\in[0,H]$. Vi har $f(0)=f(H)=0$, så maximum antas i en stationär punkt i det inre av intervallet.

   Vi har $f'(h)=(\pi R^2)/(3H^2)\cdot((H-h)^2-2h(H-h))=(\pi R^2)/(3H^2)\cdot(H-h)(H-3h)$. Vi får att f har sitt maximum när $H=3h$, dvs när $h=H/3$.

6. (a) Vi har att $\bar{z}=3/z$ ger att $|z|^2=z\bar{z}=3$, så $|z|=\sqrt{3}<2$.
   Svar: Sant.

   (b) Om en funktion är deriverbar i 2 är den också kontinuerlig där.
   Svar: Sant.

   (c) Vi har att $4>\pi$ och $\arccos(\cos(4))\in[0,\pi]$.
   Svar: Falskt.

   (d) Funktionen
   $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\sin x & \text{när} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{när} \quad x=0.\end{cases}$$
   är kontinuerlig på $[0,\pi]$ men har inget extremvärde i 0.
   Svar: Falskt.

   (e) Om f är deriverbar i 0, så är den även kontinuerlig där. Det ger att $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$.
   Svar: Sant.

   (f) Tangenten till grafen i $(a,f(a))$ har ekvationen $y=f'(a)(x-a)+f(a)$, som går genom origo percis när $0=f(a)-af'(a)$. Vi ska alltså undersöka antalet lösningar till $0=(x^3-2x^2-4x+20)-x(3x^2-4x-4)=-2x^3+2x^2+20=g(x)$. Lösningar finns eftersom $g(x)\to\infty$, när $x\to-\infty$ och $g(x)\to-\infty$, när $x\to\infty$. Derivering ger $g'(x)=-6x^2+4x=2x(2-3x)$, vilket ger att $g(x)$ är strängt avtagande på $(-\infty,0]\cup[2/3,\infty]$ och strängt växande på $[0,2/3]$. Vi har $g(0)=20>0$. Detta ger att $g(x)$ saknar nollställe på $(-\infty,2/3]$ och att den har precis ett nollställe i $[2/3,\infty)$.
   Svar: Sant.