Lösningar till tentan TMV121/TMV120 2014-08-27

1. (a) $\ln(\ln x) = 1 \iff \ln x = e \iff \mathbf{x = e^e}$.

   (b) Då täljaren är $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ är positiv för alla reella x, så beror kvotens tecken bara på nämnaren. Detta ger lösningen $\mathbf{x < -1}$.

   (c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^9(1+i)^{12}}{(2i)^{13}} = \dfrac{\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^9(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{12}}{2^{13}\cdot i^{12}i} = \dfrac{2^9e^{-9\pi i}2^6e^{9\pi i}}{2^{13}i} = \dfrac{2^2}{i} = \mathbf{-4i}.$

   (d) Minsta värdet noll antas då $\cos x = n\pi$, n heltal. Denna ekvation har lösning bara om $n = 0$. Då är lösningarna $\mathbf{x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}}$.

   (e) Den utökade koefficientmatrisen för systemet övergår genom radoperationer till trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & a^2 & 6 \\ 1 & 2 & a+1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & a+1 \\ 0 & a^2-4 & 4-2a \end{array}\right]$$

   Lösning saknas om vi har ett pivotelement i högerledet, vilket innebär att $a^2 - 4 = 0,\ 4 - 2a \neq 0$. detta gäller bara om $\mathbf{a = -2}$.

   (f)

$$\frac{\sqrt{2-\frac{\cos x}{2}} - \sqrt{1+\frac{\cos x}{2}}}{x^2} = \text{ konjugatförlängning } = \frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1}{\sqrt{2-\frac{\cos x}{2}} + \sqrt{1+\frac{\cos x}{2}}}$$

   Den andra kvoten går lugnt och stilla mot $\dfrac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

   Den första kvoten kan vi behandla med konjugatförlängning eller med l'Hôpitals regel:

$$u(x) = 1 - \cos x,\ v(x) = x^2 \ \Rightarrow\ u'(x) = \sin x,\ v'(x) = 2x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

   Hela uttrycket har därmed gränsvärdet $\mathbf{\frac{1}{4\sqrt{6}}}$.

2. (a) L kan uttryckas i parameterform:

$$t = x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{3} \iff x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = 1 - 3t$$

   Skärningspunkten ges av ekvationssystemet av linjens och planets ekvationer. Parametern t för skärningspunkten kan vi få genom att sätta in uttrycken för x, y, z i planets ekvation:

$$(1 + t) - 2\cdot 2t - 2(1 - 3t) = 5 \ \Rightarrow\ t = 2$$

   som ger skärningspunkten $x = 1 + 2 = 3,\ y = 2\cdot 2 = 4,\ z = 1 - 3\cdot 2 = -5$, alltså punkten $\mathbf{(3, 4, -5)}$.

   (b) Ur ekvationerna för L får vi en vektor längs L: $\boldsymbol{v} = (1, 2, -3)^T$. Den ligger i (är parallell med) det sökta planet. Om vårt plan ska vara vinkelrätt med planet P, så ska normalvektorn $\boldsymbol{u} = (1, -2, -2)^T$ (ur planets ekvation) också ligga i vårt nya plan. En normalvektor till planet måste vara vinkelrät mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, och kan därför väljas som $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (10, 1, 4)^T$. Vårt plan har därmed en ekvation av typen $10x + y + 2z = D$, insättning av en punkt i planet, t. ex. $(1, 0, 1)$ på linjen L ger oss $D = 14$.
   Planet är $\mathbf{10x + y + 4z = 14}$.

3. Eftersom $x^2+8x+18=(x+4)^2+2>0$, så är rotuttrycket definierat för alla reella x, och bara nämnaren inskränker **definitionsmängden:** $\mathbf{D_f} = (-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}, \infty)$.

$f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^-$, och $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$. y-axeln $\mathbf{x = 0}$ är **lodrät asymptot**.

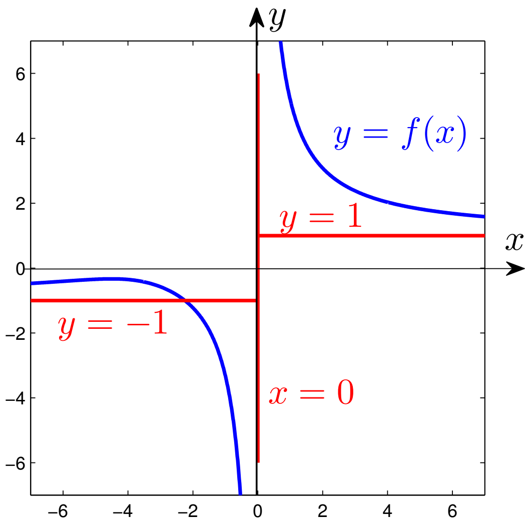
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{8}{x}+\frac{18}{x^2}}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{18}{x^2}}}{x} \to \begin{cases} -1 & \text{då} \quad x \to -\infty \\ 1 & \text{då} \quad x \to +\infty \end{cases}$$

Härav ser vi att $\mathbf{y = -1}$ **och** $\mathbf{y = 1}$ **är vågräta asymptoter.**

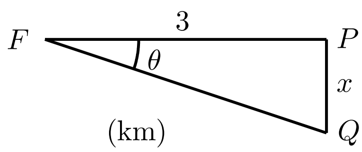
Lokala extrempunkter? Derivera funktionen:

$$f'(x) = \frac{\frac{x(x+4)}{\sqrt{x^2+8x+18}} - \sqrt{x^2+8x+18}}{x^2} = \frac{-4x-18}{x^2\sqrt{x^2+8x+18}}$$

Derivatans enda nollställe är $x = -\frac{9}{2}$, teckenväxlingen för f' kring denna punkt är $+0-$, vilket betyder att vi har ett **lokalt maximum i** $\mathbf{x = -\frac{9}{2}}$ med $f(x=-\frac{9}{2}) = -\frac{1}{3}$. **Värdemängden** är nu också bestämd: $\mathbf{V_f} = (-\infty, -\mathbf{\frac{1}{3}}] \cup (\mathbf{1}, \infty)$. Vi kan nu rita grafen:



4. Om fyren befinner sig i F, så har vi en rätvinklig triangel FPQ, där vinkeln vid P är den räta. $FP = 3$ och $PQ = 1$ i enheten km. Om vi kallar avståndet från P till en punkt på stranden i riktning mot Q för x, så är det $\frac{dx}{dt}|_{x=1}$ som uttrycker den sökta hastigheten hos ljuskäglan. Vinkeln mellan ljusstrålen och linjen FP kallar vi för θ. Figuren visar läget då $x = 1$.



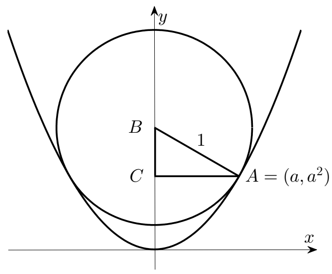
Den hastighet vi känner, är vinkelhastigheten hos ljuskäglan: $\frac{d\theta}{dt} = 8\pi$ radianer/minut (=4 varv/minut).

Enligt kedjeregeln gäller $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 8\pi$, så vi behöver x som funktion av θ. I den rätvinkliga triangeln ser vi att $x = 3\tan\theta$, så

$$\frac{dx}{dt} = 3(1+\tan^2\theta)\cdot 8\pi = (1+(\frac{1}{3})^2)\cdot 8\pi = \frac{80\pi}{3}$$

Hastigheten i Q är därmed $\mathbf{\frac{80\pi}{3}}$ **km/min**. Räknar man i SI-enheter får man istället $\frac{4000\pi}{9} \approx 1400$ m/s.

5. Låt $A = (a, a^2)$ vara den punkt i första kvadranten på parabeln där den tangeras av cirkeln, och låt $B = (0, b)$ vara cirkelns medelpunkt (av symmetriskäl belägen på y-axeln). Riktningskoefficienten för linjen genom dessa punkter ges dels av punkternas koordinater, dels av att den är normal till parabeln:



$$\begin{cases} k &= \frac{b-a^2}{0-a} \\ k &= -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{2a} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{2} + a^2$$

Om $C = (0, a^2)$ så är triangeln ABC rätvinklig, sidlängderna är $AC = a,\ BC = \frac{1}{2},\ AB = 1$, och Pythagoras sats ger då

$$a^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1, \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{\frac{5}{4}}$$

6. (a) Om $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ och $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, och om vinkeln mellan vektorerna är α, så har vi:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\alpha = 0, \text{ och } |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha = 0$$

men sådana α finns inte. Alltså är någon av vektorerna nollvektorn. **Sant**.

(b) Med $a = 1$ skulle vi ha $\ln(1 + b) = \ln 1 + \ln b = \ln b$, vilket är falskt för varje b då ln-funktionen är strängt växande. **Falskt**.

(c) Med $x = \pi$ har vi $\arcsin(\sin x) = \arcsin 0 = 0 \neq x$. **Falskt**.

(d) Vi undersöker $f(x) = x - \ln(x + 1)$, när $x > -1$. Vi har $f(x) \to \infty$, när $x \to -1^+$ och när $x \to \infty$. Derivering ger $f'(x) = 1 - 1/(1 + x) = x/(1 + x)$, vilket ger att $f(x)$ har ett minsta värde i $x = 0$ och det är $f(0) = 0$. **Sant**.

(e) En kontinuerlig funktion på ett slutet begränsat intervall har en värdemängd som är av samma typ. **Falskt**.

(f) Medelvärdessatsen ger ett c i intervallet $(1, 2)$ där $f'(c) = (f(2) - f(1))/(2 - 1) = (24 - 15)/1 = 9$. **Sant**.

7. Se kursboken!