MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för Z1, (TMV120)
Tid: 2010-10-23, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Peter Helgesson, 0703–088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från duggor, Matlab och SI hösten 2010 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida under e.m. 23/10.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv120/1011/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) För vilka reella tal är $\dfrac{x-5}{3-x} \geq 0$? (2p)

   b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y + 7z = 2 \\ \quad\;\; y + 2z = 1 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases}$ (2p)

   c) Bestäm samtliga asymptoter till $y = 2x - 3 + \dfrac{1-x}{(x-3)^2}$. (2p)

   d) En ballonguppstigning betrakats 100 m från startplatsen (marken är plan och horisontell). När ballongens riktning är $\frac{\pi}{4}$ radianer över horisontalplanet uppmäter man att vinkeln ändras med $0,025$ rad/s. Beräkna ballongens fart i detta läge. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

   $$\alpha)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + (\ln x)^{10}}{x + 3e^x} \qquad \beta)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\tan(x^2-1)} \qquad \gamma)\quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x}$$

   f) Funktionen $f(x) = \cos x$ med definitionsmängden $\mathcal{D}(f) = [\pi, 2\pi]$ är (strängt) växande och därmed inverterbar. Inversen f^{-1} är inte arccos, men kan uttryckas med hjälp av arccos. Gör det! (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Bestäm i parameterform skärningslinjen mellan planen $x - y + z = 2$ och $2x - y + 2z = 3$. (2p)

   b) Beräkna avståndet mellan punkten $(4, 2, 6)$ och planet $2x - y + 2z = 3$. (2p)

   c) Vilken punkt i planet $2x - y + 2z = 3$ är närmast punkten $(4, 2, 6)$? (2p)

3. Skissera grafen av funktionen (6p)

   $$f(x) = \frac{e^{3-x}}{x-5}.$$

   Ange alla asymptoter och lokala extrempunkter. Konkavitet/konvexitet behöver ej utredas !

Var god vänd!

4. Betrakta funktionen (6p)

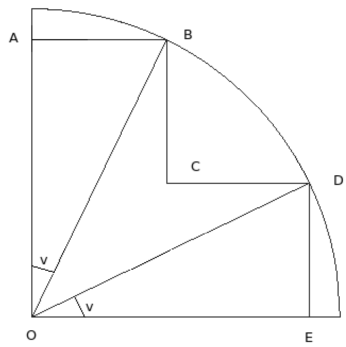
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \ln|x| & \text{då} \quad x \le -1 \\ 4x + \cos(\pi x) & \text{då} \quad -1 < x < 1 \\ xe^{1-x} - 6 & \text{då} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) Undersök i vilka intervall f är växande respektive avtagande.

b) Förklara varför f är inverterbar.

c) Beräkna $(f^{-1})'(1)$ (obs: derivatan).

5. Figuren visar en kvartscirkelskiva, i vilken ett L-format område OABCDE är markerat. Områdets alla hörn är vinkelräta, B och D ligger på cirkeln. Bestäm vinkeln v så att arean av det L-formade området maximeras. (6p)



6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{93} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b) Ekvationen $z^9 = -1$ har fyra rötter med positiv realdel.

c) Ekvationen $\sin x + 2\sin 3x + 3\sin 5x = 7$ har oändligt många lösningar.

d) Om $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ existerar, så måste också $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existera.

e) För vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ i rummet är alltid $||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||^2 + (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 ||\boldsymbol{b}||^2$

f) Om f har andraderivata för alla x och om $f(0) = f(1) = f(2)$, så måste det finnas minst en punkt $c \in (0,2)$ sådan att $f''(c) = 0$.

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)

b) Bevisa att $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$. Du behöver inte bevisa eventuella hjälpsatser om trigonometri eller gränsvärden. (4p)

Lycka till!
/Peadar